

Corso di Automati e Linguaggi Formali

Anno Accademico 2014/2015

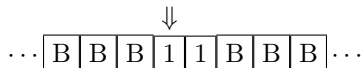
Esercizi con soluzione

Istruzioni

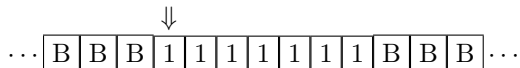
- Scrivere *Nome*, *Cognome* e *Matricola* su **ogni** foglio (solo pagine **dispari**).
- Scrivere la risposta nello spazio bianco al di sotto della domanda; Non è possibile allegare fogli aggiuntivi, quindi cercate di essere chiari e non prolissi.
- In caso di errori indicate chiaramente quale parte della risposta deve essere considerata; annullate le parti non pertinenti.
- Assicuratevi che non manchi alcun foglio al momento della consegna.

Problema 1

Definire una TM (tramite la tabella o diagramma di transizione di stato) che dati n uni (1) consecutivi sul nastro, B su tutte le altre posizioni del nastro e testina posizionata sul primo uno (1) a sinistra, termina con $3n + 1$ uni (1) consecutivi sul nastro, B su tutte le altre posizioni del nastro e testina posizionata sul primo uno (1). Ad esempio, data la configurazione



La TM termina con la seguente configurazione



Soluzione:

Di seguito si mostra la tabella di transizione di stato per una TM che si comporta come richiesto:

| | 0 | 1 | B |
|-------------------|---------------|---------------|---------------|
| $\rightarrow q_0$ | | $(q_0, 1, R)$ | $(q_1, 0, L)$ |
| q_1 | | $(q_1, 1, L)$ | (q_2, B, R) |
| q_2 | $(q_7, 1, L)$ | (q_3, B, R) | |
| q_3 | $(q_3, 0, R)$ | $(q_3, 1, R)$ | $(q_4, 1, R)$ |
| q_4 | | | $(q_5, 1, R)$ |
| q_5 | | | $(q_6, 1, L)$ |
| q_6 | $(q_6, 0, L)$ | $(q_6, 1, L)$ | (q_2, B, R) |
| $*q_7$ | | | (q_7, B, R) |

Problema 2

Data una stringa $w \in \Sigma^*$, la stringa w^R è ottenuta rovesciando l'ordine dei simboli che costituiscono w . Ad esempio, se $w = abcd$, allora $w^R = dcba$.

Un linguaggio L è chiuso per rovesciamento se $\forall w, w \in L \Rightarrow w^R \in L$.

Dimostrare, usando una riduzione, che $L_R = \{\text{codice}(M_i) | L(M_i) \text{ è chiuso per rovesciamento}\}$ è indecidibile, dove $\text{codice}(M_i)$ è la stringa che codifica la macchina di Turing M_i (come visto a lezione).

Soluzione:

Proviamo che $\overline{L_R}$, dove

$$\overline{L_R} = \{\text{codice}(M_i) | L(M_i) \text{ non è chiuso per rovesciamento}\}$$

non è decidibile. Ciò è sufficiente poiché se L_R è decidibile, allora lo deve essere anche $\overline{L_R}$. Consideriamo il caso non banale in cui $|\Sigma| > 1$ (notare che se $|\Sigma| = 1$ si ha che $w = w^R$ e L_R è banalmente decidibile). Costruiamo una riduzione di L_u a $\overline{L_R}$. Ricordiamo che la riduzione deve essere tale che

$$\text{codifica}(M_i, w) \in L_u \Rightarrow \text{riduzione}(\text{codifica}(M_i, w)) \in \overline{L_R}$$

$$\text{codifica}(M_i, w) \notin L_u \Rightarrow \text{riduzione}(\text{codifica}(M_i, w)) \notin \overline{L_R}$$

dove $\text{codifica}(M_i, w) = \text{codice}(M_i)111w$, cioè la stringa ottenuta concatenando la codifica binaria di M_i vista a lezione con il separatore 111 e infine la string w .

Sia $ab \in \Sigma^*$. Definiamo $\text{riduzione}(\text{codifica}(M_i, w)) = \text{codice}(M'_i)$, dove M'_i è la seguente TM:

Sia x la stringa in ingresso a M'_i

M'_i simula M_i su w restituendo

“accetta” se M_i accetta w e $x = ab$

“rifiuta” altrimenti

Notare che

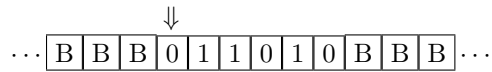
$$\text{codifica}(M_i, w) \in L_u \Rightarrow M_i(w) = \text{accetta} \Rightarrow L(M'_i) = \{ab\} \Rightarrow \text{codice}(M'_i) \in \overline{L_R}$$

$$\text{codifica}(M_i, w) \notin L_u \Rightarrow M_i(w) = \text{rifiuta} \Rightarrow L(M'_i) = \emptyset \Rightarrow \text{codice}(M'_i) \notin \overline{L_R}$$

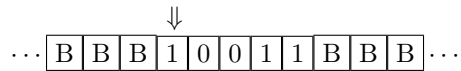
Quindi non può esistere una TM che accetta, arrendendosi sempre, il linguaggio $\overline{L_R}$, altrimenti L_u sarebbe decidibile!

Problema 3

Definire una TM (tramite la tabella o diagramma di transizione di stato) che data una stringa di 0 e 1 sul nastro, B su tutte le altre posizioni del nastro e testina posizionata sul primo simbolo (0 o 1) a sinistra, termina l'esecuzione in uno stato di accettazione solo se il numero di 0 è uguale al numero di 1. Ad esempio, la configurazione



è accettata, mentre la configurazione



non è accettata.

Soluzione:

Di seguito si mostra la tabella di transizione di stato per una TM, con alfabeto di nastro $\{0, 1, X, B\}$, che si comporta come richiesto:

| | 0 | 1 | X | B |
|-------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $\rightarrow q_0$ | (q_1, B, R) | (q_2, B, R) | (q_0, B, R) | (q_4, B, R) |
| q_1 | $(q_1, 0, R)$ | (q_3, X, L) | (q_1, X, R) | |
| q_2 | (q_3, X, L) | $(q_2, 1, R)$ | (q_2, X, R) | |
| q_3 | $(q_3, 0, L)$ | $(q_3, 1, L)$ | (q_3, X, L) | (q_0, B, R) |
| $*q_4$ | | | | |