Apprendimento con Rinforzo

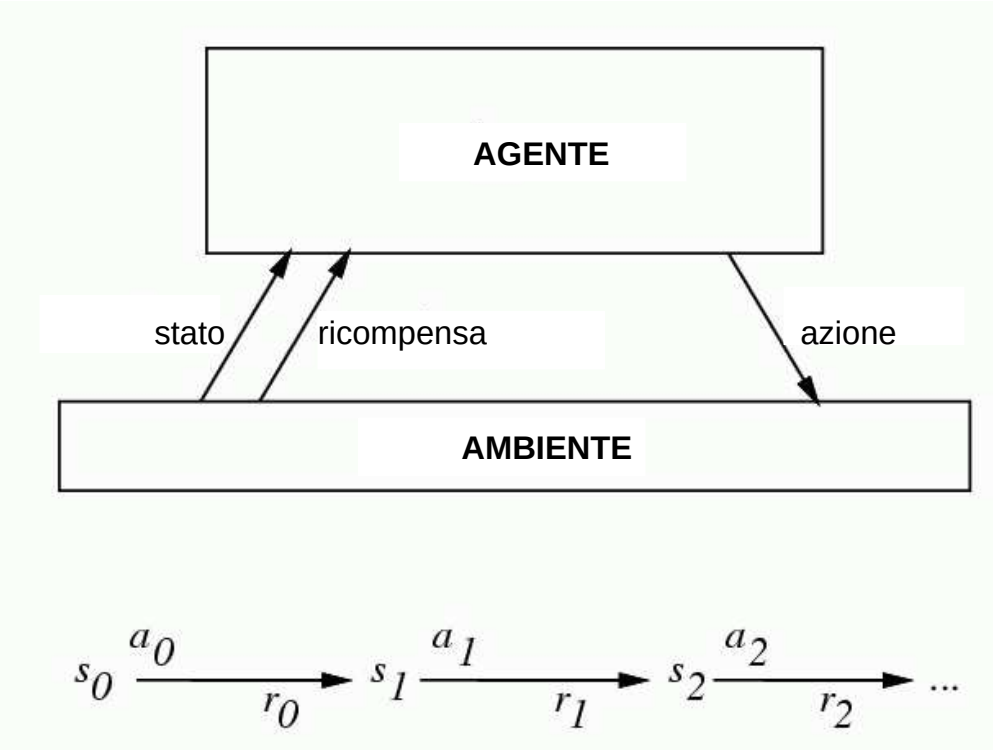
- Sono dati:
  - agente (intelligente ?), che può
    - trovarsi in uno stato s, ed
    - eseguire una azione a (all'interno delle azioni possibili nello stato corrente)
  - ed opera in un ambiente e, che applicando una azione a nello stato s restituisce
    - lo stato successivo, e
    - una ricompensa r, che può essere positiva (+), negativa (-), o neutra (0).
- Scopo dell'agente è quello di massimizzare una funzione delle ricompense
  (es. ricompensa scontata: $\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r_{t+1}$ dove $0 \leq \gamma < 1$)

Esempio di applicazione: sistema che imparare a giocare a dama

Esempio di applicazione: modulo di navigazione per un robot in un ambiente sconosciuto

Esempio di applicazione: navigare sul Web alla ricerca di informazione focalizzata

Agente/Ambiente



Goal: apprendere le azioni che massimizzano

$r_0 + \gamma r_1 + \gamma^2 r_2 + \ldots$, dove $0 \leq \gamma < 1$

Processi di Decisione di Markov

Si assume

- insieme finito di stati S
- insieme di azioni A
- ad ogni istante di tempo t l'agente osserva lo stato $s_t \in S$ e sceglie l'azione $a_t \in A$
- poi riceve la ricompensa immediata r_t
- e cambia lo stato in s_{t+1}
- assunzione di Markov: $s_{t+1} = \delta(s_t, a_t)$ e $r_t = r(s_t, a_t)$
  - cioe', r_t e s_{t+1} dipendono SOLO dallo stato ed azione *correnti*
  - le funzioni δ e r possono essere DETERMINISTICHE o NONDETERMINISTICHE
  - le funzioni δ e r possono essere CONOSCIUTE o IGNOTE

Compito di Apprendimento per l'Agente

Eseguire azioni nell'Ambiente, osservare i risultati e

- apprendere la politica (per le azioni) $\pi : S \rightarrow A$ che massimizza (nel caso più generale)

$$E[r_t + \gamma r_{t+1} + \gamma^2 r_{t+2} + \ldots]$$

  per ogni stato iniziale in S

- $0 \leq \gamma < 1$ è il *fattore di sconto* per ricompense future

Novità:

- la funzione target è $\pi : S \rightarrow A$
- ma non si hanno a disposizione esempi nella forma (s, a)
- gli esempi di apprendimento sono nella forma $((s, a), r)$

La Funzione di Valutazione

Consideriamo il CASO DETERMINISTICO:

- per ogni possibile politica π che l'agente può adottare, possiamo definire una funzione di valutazione sugli stati

$$V^{\pi}(s) \equiv r_t + \gamma r_{t+1} + \gamma^2 r_{t+2} + \ldots$$
$$\equiv \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i r_{t+i}$$

  dove $r_t, r_{t+1}, \ldots$ sono generati seguendo la politica π a partire dallo stato s

- riformulato, il compito consiste nell'apprendere la politica ottima π^*

$$\pi^* \equiv arg\max_{\pi} V^{\pi}(s), (\forall s)$$

Cosa Apprendere ?

Possiamo tentare di far apprendere all'agente la funzione di valutazione V^{π^*} (riferita nel seguito semplicemente con V^*)

L'agente potrebbe effettuare una ricerca in avanti per scegliere la migliore azione a partire da ogni stato s perché

$$\pi^*(s) = arg\max_a [r(s,a) + \gamma V^*(\delta(s,a))]$$

Problema:

- Funziona solo se l'agente conosce $\delta : S \times A \to S$, e $r : S \times A \to \Re$
- ... ma se l'agente non ha questa conoscenza (come succede in molte applicazioni del mondo reale) non si può procedere in questo modo...

La Funzione $Q()$

Soluzione:

- definire una nuova funzione molto simile a V^*

$$Q(s,a) \equiv r(s,a) + \gamma V^*(\delta(s,a))$$

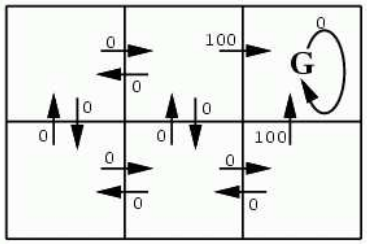
- se l'agente apprende Q, esso può scegliere l'azione ottima anche senza conoscere δ!

$$\pi^*(s) = arg\max_a [r(s,a) + \gamma V^*(\delta(s,a))]$$

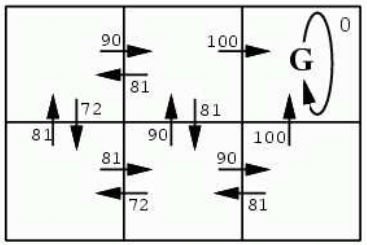
$$\pi^*(s) = arg\max_a Q(s,a)$$

Quindi, Q è la funzione di valutazione che l'agente deve apprendere

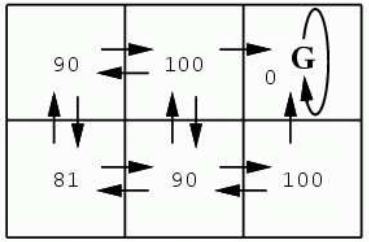
Esempio



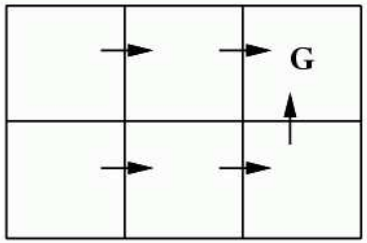
$r(s,a)$



$Q(s,a)$



$V^*(s)$



una politica ottima

Come Apprendere $Q()$?

Notare che Q e V^* sono intimamente correlate:

$$V^*(s) = \max_{a'} Q(s, a')$$

Ciò permette di scrivere Q RICORSIVAMENTE come

$$\begin{aligned} Q(s_t, a_t) &= r(s_t, a_t) + \gamma V^*(\delta(s_t, a_t)) \\ &= r(s_t, a_t) + \gamma \max_{a'} Q(s_{t+1}, a') \end{aligned}$$

Bene! Poniamo $\hat{Q}$ essere la funzione corrente appresa dall'agente che approssima Q.

Consideriamo la seguente regola di apprendimento:

$$\hat{Q}(s, a) \leftarrow r + \gamma \max_{a'} \hat{Q}(s', a')$$

dove s' è lo stato risultante dalla applicazione della azione a allo stato s

Algoritmo $Q - Learning$

1. per ogni s, a inizializza la entry della tabella $\hat{Q}(s, a) \leftarrow 0$
2. osserva lo stato corrente s
3. esegui per sempre
   (a) seleziona una azione a ed eseguirla
   (b) ricevi la ricompensa immediata r
   (c) osserva il nuovo stato s'
   (d) aggiorna la entry $\hat{Q}(s, a)$ come segue:

$$\hat{Q}(s, a) \leftarrow r + \gamma \max_{a'} \hat{Q}(s', a')$$

   (e) $s \leftarrow s'$

Algoritmo $Q - Learning$

1. per ogni s, a inizializza la entry della tabella $\hat{Q}(s, a) \leftarrow 0$
2. osserva lo stato corrente s
3. esegui per sempre
   (a) seleziona una azione a ed eseguila — come selezionarla ?
   (b) ricevi la ricompensa immediata r
   (c) osserva il nuovo stato s'
   (d) aggiorna la entry $\hat{Q}(s, a)$ come segue:

$$\hat{Q}(s, a) \leftarrow r + \gamma \max_{a'} \hat{Q}(s', a')$$

   (e) $s \leftarrow s'$

Algoritmo $Q - Learning$

1. per ogni s, a inizializza la entry della tabella $\hat{Q}(s, a) \leftarrow 0$
2. osserva lo stato corrente s
3. esegui per sempre

   (a) seleziona una azione a ... strategia → random (esplorazione); $arg\max_a \hat{Q}(s, a)$ (sfruttamento)

   (b) ricevi la ricompensa immediata r

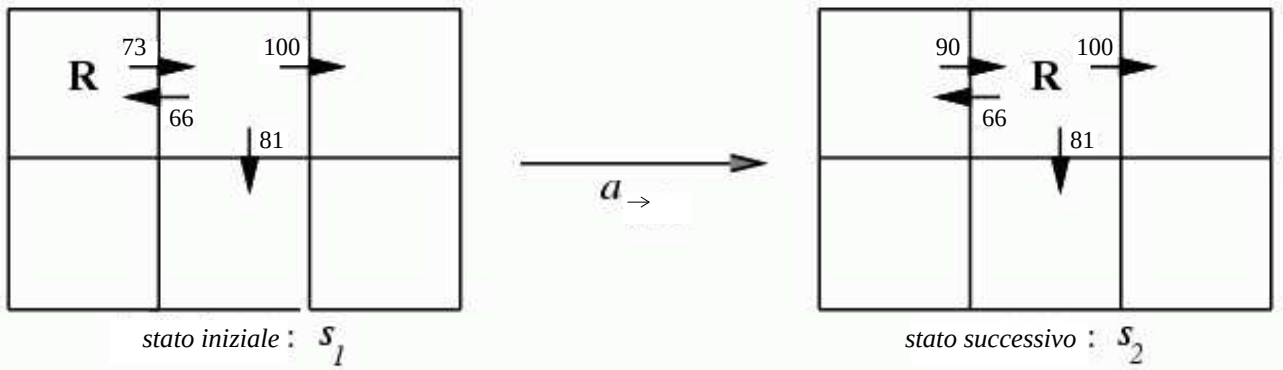
   (c) osserva il nuovo stato s'

   (d) aggiorna la entry $\hat{Q}(s, a)$ come segue:

$$\hat{Q}(s, a) \leftarrow r + \gamma \max_{a'} \hat{Q}(s', a')$$

   (e) $s \leftarrow s'$

Esempio di Applicazione



$$\hat{Q}(s_1, a_{\rightarrow}) \leftarrow r + \gamma \max_{a'} \hat{Q}(s_2, a')$$

$$\leftarrow 0 + 0.9 \max\{66, 81, 100\}$$

$$\leftarrow 90$$

notare che se le ricompense sono non-negative, allora

$$(\forall s, a, n)\ \hat{Q}_{n+1}(s, a) \geq \hat{Q}_n(s, a)$$

e

$$(\forall s, a, n)\ 0 \leq \hat{Q}_n(s, a) \leq Q(s, a)$$

Convergenza

$\hat{Q}$ converge a Q

Consideriamo il caso deterministico dove ogni (s, a) è visitato un numero infinito di volte

Prova: Definiamo un intervallo pieno un intervallo durante il quale ogni (s, a) è visitato. Durante ogni intervallo pieno l'errore più grande nella tabella $\hat{Q}$ è ridotto di un fattore γ

Infatti, sia $\hat{Q}_n$ la tabella dopo n aggiornamenti, e Δ_n l'errore massimo in $\hat{Q}_n$, cioè

$$\Delta_n = \max_{s,a} |\hat{Q}_n(s, a) - Q(s, a)|$$

Per ogni entry della tabella $\hat{Q}_n(s, a)$ aggiornata alla iterazione $n + 1$, l'errore nella stima rivista $\hat{Q}_{n+1}(s, a)$ è

$$
\begin{aligned}
|\hat{Q}_{n+1}(s,a) - Q(s,a)| &= |(r + \gamma \max_{a'} \hat{Q}_n(s',a')) \\
&\quad -(r + \gamma \max_{a'} Q(s',a'))| \\
&= \gamma |\max_{a'} \hat{Q}_n(s',a') - \max_{a'} Q(s',a')| \\
&\leq \gamma \max_{a'} |\hat{Q}_n(s',a') - Q(s',a')| \\
&\leq \gamma \max_{s'',a'} |\hat{Q}_n(s'',a') - Q(s'',a')| \\
|\hat{Q}_{n+1}(s,a) - Q(s,a)| &\leq \gamma \Delta_n
\end{aligned}
$$

Notare che abbiamo usato il risultato generale

$$
|\max_a f_1(a) - \max_a f_2(a)| \leq \max_a |f_1(a) - f_2(a)|
$$

Caso NONDETERMINISTICO

Si ridefiniscono V, Q considerando i valori aspettati

$$\begin{aligned} V^{\pi}(s) &\equiv E[r_t + \gamma r_{t+1} + \gamma^2 r_{t+2} + \ldots] \\ &\equiv E[\sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i r_{t+i}] \end{aligned}$$

$$Q(s,a) \equiv E[r(s,a) + \gamma V^*(\delta(s,a))]$$

Per l'apprendimento, sostituire la regola di aggiornamento con

$$\hat{Q}_n(s,a) \leftarrow (1-\alpha_n)\hat{Q}_{n-1}(s,a) + \alpha_n[r + \gamma \max_{a'} \hat{Q}_{n-1}(s',a')] \text{ dove } \alpha_n = \frac{1}{1 + visite_n(s,a)}$$

Sotto determinate condizioni si dimostra la convergenza