Apprendimento in Probabilità ed Approssimazione

Apprendimento PAC

PAC Learning (Probably Approximately Correct Learning)

Assume che: input ed output sono binari, non c'è rumore, le istanze sono estratte da X concordemente ad una distribuzione di probabilità $\mathcal{D}$ *arbitraria* ma *stazionaria*.

Il framework di apprendimento PAC cerca di rispondere alle seguenti domande:

- Sotto quali condizioni apprendere con successo è possibile o impossibile ?
- Sotto quali condizioni si può assicurare che un particolare algoritmo di apprendimento apprenda con successo ?

Apprendimento PAC

Consideriamo una classe C di possibili concetti target (funzioni che vogliamo apprendere) definita su uno Spazio delle Istanze X (con istanze di dimensione m), ed un algoritmo di apprendimento L che utilizza uno Spazio delle Ipotesi $\mathcal{H}$.

Def.: C è PAC-apprendibile da L usando $\mathcal{H}$ se per ogni

- $c \in C$,
- distribuzione $\mathcal{D}$ su X,
- ϵ tale che $0 < \epsilon < 1/2$,
- δ tale che $0 < \delta < 1/2$,

l'algoritmo di apprendimento L con probabilità almeno $(1 - \delta)$ restituisce una ipotesi $h \in \mathcal{H}$ tale che $error_{\mathcal{D}}(h) \leq \epsilon$, in tempo che è **polinomiale** in $1/\epsilon$, $1/\delta$, m, e $size(c)$ (spazio di memoria necessario per rappresentare c).

Apprendimento PAC

Si può dimostrare che assumendo:

- $c \in \mathcal{H}$
- L consistente, cioè che restituisce una ipotesi h consistente con Tr, o equivalentemente $h \in VS_{\mathcal{H},Tr}$ (ad esempio, **Find-S** è consistente)

allora, con probabilità almeno $(1 - \delta)$, L restituisce una ipotesi $h \in \mathcal{H}$ tale che $error_{\mathcal{D}}(h) < \epsilon$ se il numero di esempi di apprendimento n soddisfa la seguente disuguaglianza:

$$n \geq \frac{1}{\epsilon}(ln(|\mathcal{H}|) + ln(\frac{1}{\delta}))$$

dove $|\mathcal{H}|$ è la cardinalità dello Spazio delle Ipotesi e $ln()$ è il logaritmo naturale

- infine, poiché $(1-\epsilon) \leq e^{-\epsilon}$ se $0 \leq \epsilon \leq 1$, abbiamo $|\mathcal{H}|(1-\epsilon)^n \leq |\mathcal{H}|e^{-\epsilon n}$

Prova...

Idea base: bisogna dare un limite al numero di esempi necessario ad assicurare che il Version Space (ricordiamo che L è consistente) non contiene ipotesi non "accettabili":

$$(\forall h \in VS_{\mathcal{H},Tr})\ error_{\mathcal{D}}(h) < \epsilon$$

Si può dimostrare che assumendo:

- $c \in \mathcal{H}$

Prova...

$$(\forall h \in VS_{\mathcal{H},Tr})\ error_{\mathcal{D}}(h) < \epsilon$$

Primo risultato: se $|\mathcal{H}| < \infty$, $|Tr| = n > 0$ e Tr è costituito da esempi di un concetto target c estratti indipendentemente ed a caso, allora per ogni $0 \leq \epsilon \leq 1$, la probabilità che la disuguaglianza **NON** sia soddisfatta è minore od uguale a $|\mathcal{H}|e^{-\epsilon n}$:

- siano $h_1, \ldots, h_k$ tutte le ipotesi con $error_{\mathcal{D}}(h) \geq \epsilon$; la disuguaglianza NON è soddisfatta se e solo se ALMENO una di tali ipotesi è consistente con Tr
- la probabilità che una di tali ipotesi sia consistente con un singolo esempio è $(1 - \epsilon)$, e quindi per n esempi indipendenti la probabilità è $(1 - \epsilon)^n$
- poiché esistono k di tali ipotesi, la probabilità che ci interessa è a più $k(1 - \epsilon)^n \leq |\mathcal{H}|(1 - \epsilon)^n$ (poiché $k \leq |\mathcal{H}|$)
- infine, poiché $(1 - \epsilon) \leq e^{-\epsilon}$ se $0 \leq \epsilon \leq 1$, abbiamo $|\mathcal{H}|(1 - \epsilon)^n \leq |\mathcal{H}|e^{-\epsilon n}$

Prova...

Cosa abbiamo ottenuto: abbiamo un limite superiore alla probabilità che usando un Tr con n esempi, il Version Space contenga qualche ipotesi CATTIVA, cioè che L restituisca h, una delle ipotesi cattive, per cui $error_{\mathcal{D}}(h) \geq \epsilon$!

Quindi, se vogliamo che tale probabilità sia inferiore a livello desiderato δ

$$|\mathcal{H}|e^{-\epsilon n} \leq \delta$$

bisogna usare un valore per n per cui

$$n \geq \frac{1}{\epsilon}(ln(|\mathcal{H}|) + ln(\frac{1}{\delta}))$$

o, alternativamente, se si usa un tale valore per n, con probabilità $1 - \delta$ l'ipotesi h restituita da L avrà $error_{\mathcal{D}}(h) < \epsilon$

Apprendimento PAC: esempio $\mathcal{H}_4$

Congiunzione di m letterali

- Spazio delle Istanze $\rightarrow$ stringhe di m bit: $X = \{s | s \in \{0,1\}^m\}$
- Spazio delle Ipotesi $\rightarrow$ tutte le sentenze logiche che riguardano i letterali $l_1, \ldots, l_m$ (anche in forma negata, $\neg l_i$) e che contengono solo l'operatore $\wedge$ (**and**):

$$\mathcal{H} = \{f_{\{i_1,\ldots,i_j\}}(s) | f_{\{i_1,\ldots,i_j\}}(s) \equiv L_{i_1} \wedge L_{i_2} \wedge \cdots \wedge L_{i_j},$$
$$\text{dove } L_{i_k} = l_{i_k} \text{ oppure } \neg l_{i_k}, \{i_1, \ldots, i_j\} \subseteq \{1, \ldots, 2m\}\}$$

Notare che se in una formula un letterale compare sia affermato che negato, allora la formula ha sempre valore di verità $false$ (formula non soddisfacibile)

Quindi, tutte le formule che contengono almeno un letterale sia affermato che negato sono equivalenti alla funzione che vale sempre $false$

Apprendimento PAC: esempio $\mathcal{H}_4$

E' la congiunzione di m letterali PAC-apprendibile usando **Find-S** con $\mathcal{H}_4$? Si !

Infatti:

- ogni congiunzione di m letterali è inclusa in $\mathcal{H}_4$
- **Find-S** è consistente
- $|\mathcal{H}_4| = 3^m + 1$ e poiché $\frac{1}{\epsilon}(ln(3^{m+1}) + ln(\frac{1}{\delta})) > \frac{1}{\epsilon}(ln(3^m + 1) + ln(\frac{1}{\delta}))$

$$n \geq \frac{1}{\epsilon}((m+1)ln(3) + ln(\frac{1}{\delta}))$$

quindi n è polinomiale in $1/\epsilon, 1/\delta, m$, e $size(c)$ (che non compare)

- per ogni esempio di apprendimento **Find-S** impiega tempo lineare nella dimensione della ipotesi corrente (e tale dimensione è $\geq size(c)$) e nella dimensione dell'input (m), quindi di nuovo polinomiale, e globalmente è polinomiale per Tr

Quindi tutte le condizioni per la PAC-apprendibilità sono soddisfatte !

Apprendimento PAC

Usando la disuguaglianza precedente ed altre considerazioni è possibile mostrare che alcune classi di concetti non sono PAC-apprendibili dato uno specifico algoritmo di apprendimento L e $\mathcal{H}$.

In particolare è possibile mostrare che:

- se $\mathcal{H}$ contiene tutte le funzioni booleane definite su X allora $C = \mathcal{H}$ non è PAC-apprendibile da algloritmi consistenti
- esistono classi di concetti C che non sono PAC-apprendibili da algoritmi consistenti che usano C come Spazio delle Ipotesi, tuttavia diventano PAC-apprendibili se uno Spazio delle Ipotesi "più grande" è usato, cioè $C \subset \mathcal{H}$

Il problema con la disuguaglianza data è che questa non può essere usata se $|\mathcal{H}| = \infty$

Tuttavia, il fattore chiave non è quante funzioni diverse sono contenute in $\mathcal{H}$, ma quante funzioni "utili" sono in $\mathcal{H}$: VC-dimension dà una risposta a questa domanda

Apprendimento PAC

Si può mostrare che, se assumiamo:

- $c \in \mathcal{H}$
- L consistente

allora con probabilità almeno $(1 - \delta)$, l'algoritmo di apprendimento L restituisce una ipotesi $h \in \mathcal{H}$ tale che $error_{\mathcal{D}}(h) \leq \epsilon$ se il numero di esempi di apprendimento n soddisfa la seguente disuguaglianza:

$$n \geq \frac{1}{\epsilon}(4 \log_2(\frac{1}{\delta}) + 8VC(\mathcal{H}) \log_2(\frac{13}{\epsilon}))$$

Notare che $VC(\mathcal{H}) \leq \log_2(|\mathcal{H}|)$

$$VC(\mathcal{H}) \leq \log_2(|\mathcal{H}|)$$

Mostriamo che $VC(\mathcal{H}) \leq \log_2(|\mathcal{H}|)$

- per ogni S tale che $\mathcal{H}$ frammenta S abbiamo $|\mathcal{H}| \geq 2^{|S|}$, infatti $\mathcal{H}$ può implementare tutte le possibili dicotomie di S, che sono esattamente $2^{|S|}$.
- scegliendo un S tale che $|S| = VC(\mathcal{H})$, otteniamo $|\mathcal{H}| \geq 2^{VC(\mathcal{H})}$

Quindi, applicando $\log_2$ ad entrambi i lati della disuguaglianza, possiamo concludere che $\log_2(|\mathcal{H}|) \geq VC(\mathcal{H})$

Esempio di Spazio delle Ipotesi con VC-dimension Infinita

- Spazio delle Istanze: Numeri Reali
- Spazio delle Ipotesi:

$$f(x, \alpha) \equiv \theta(\sin(\alpha x)), \quad x, \alpha \in \mathbf{R}.$$

$$\theta(x) = 1 \; \forall x > 0; \quad \theta(x) = -1 \; \forall x \leq 0$$

H possiede VC-dimension infinita !

- si considerino i punti:

$$x_i = 10^{-i}, \;\; i = 1, \cdots, l.$$

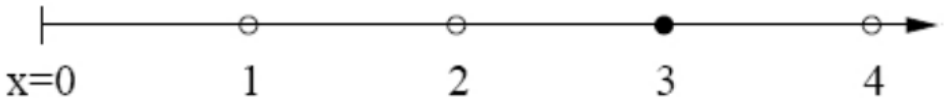
- si specifichi per ogni punto una etichettatura:

$$y_1, y_2, \cdots, y_l, \quad y_i \in \{-1, 1\}.$$

ipotesi che realizza l'etichettatura:

$$\alpha = \pi(1 + \sum_{i=1}^{l} \frac{(1 - y_i)10^i}{2}).$$

notare che i seguenti 4 punti equidistanti



non possono essere separati!