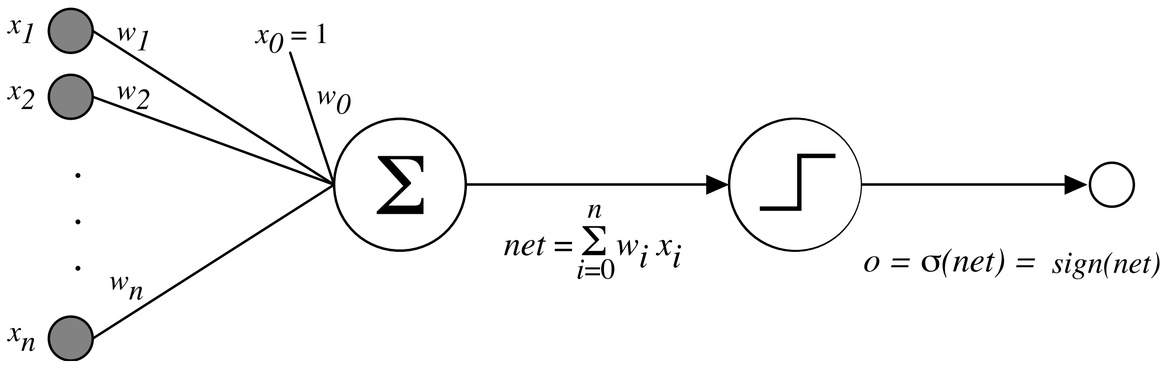
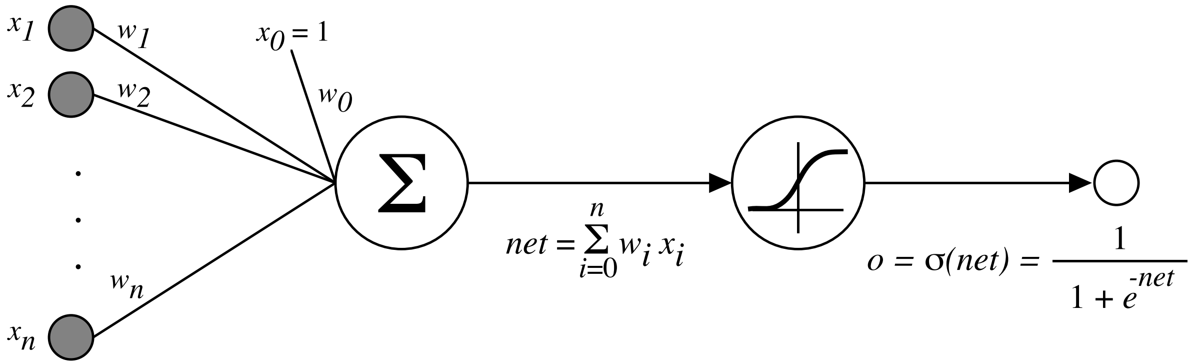
Neurone Artificiale

Alternativa 1: hard-threshold $\longrightarrow$ iperpiano!!



Alternativa 2: neurone sigmoidale $\longrightarrow$ funzione derivabile

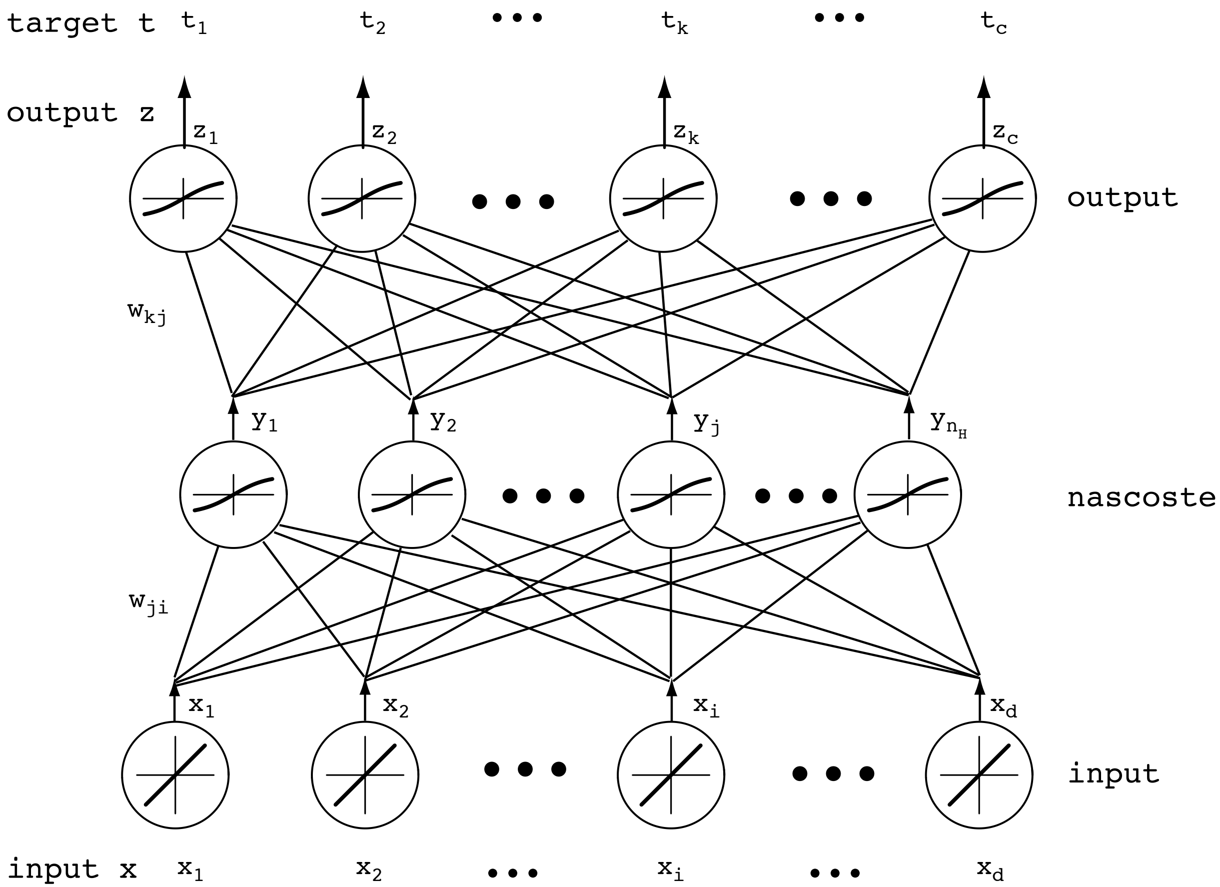


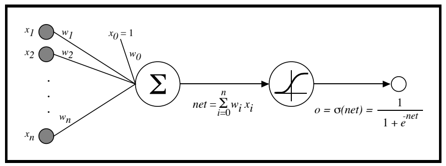
Reti Neurali Artifi ciali

Una Rete Neurale Artificiale è un sistema costituito da unità interconnesse che calcolano funzioni (numeriche) non-lineari:

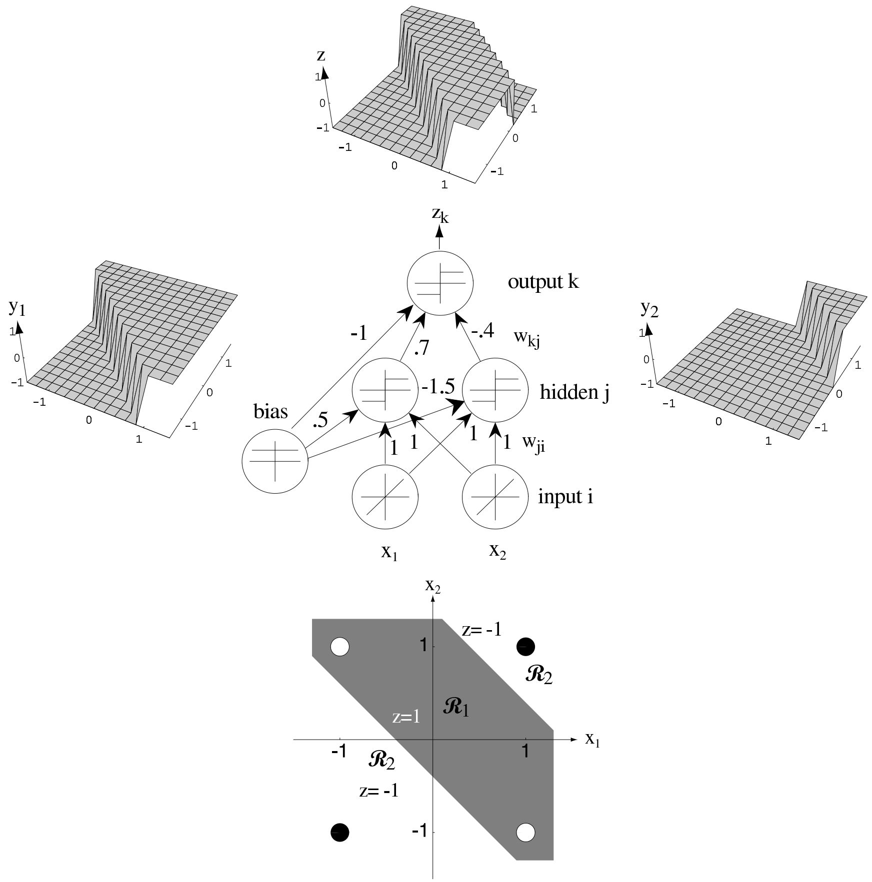
- le unità di *input* rappresentano le variabili di ingresso;
- le unità di *output* rappresentano le variabili di uscita;
- le unità di *nascoste* (se ve ne sono) rappresentano variabili interne che codificano (dopo l'apprendimento) le correlazioni tra le variabili di input relativamente al valore di output che si vuole generare.
- sulle connessioni fra unità sono definiti *pesi* adattabili (dall'algoritmo di apprendimento).

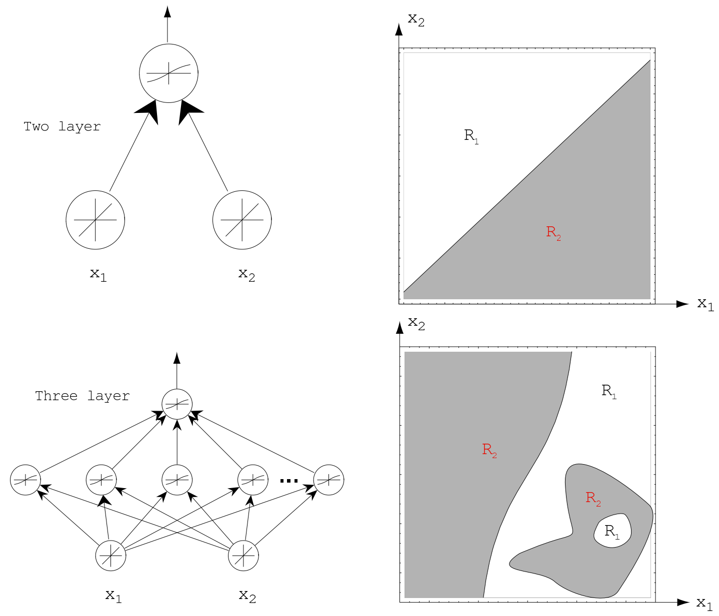
Reti Neurali Feed-forward (un solo livello nascosto)





Reti Neurali Feed-forward e Superfici di Decisione





Apprendimento di Reti di Perceptron

Abbiamo visto che un singolo Perceptron non riesce ad apprendere tutte le funzioni booleane (es. XOR)

Però una rete di Perceptron può implementare una qualunque funzione booleana (tramite AND, OR, NOT).

Problema: come effettuare l'apprendimento di una rete di Perceptron ?

Non si sa come assegnare "credito" o "colpe" alle unità nascoste:

PROBLEMA DELL'ASSEGNAMENTO DEL CREDITO

Una possibile soluzione è quella di rendere il singolo neurone derivabile e sfruttare la tecnica di Discesa del Gradiente per apprendere i pesi "giusti".

Vediamo, quindi, come la Discesa del Gradiente si applica ad un Perceptron "semplifi cato".

Discesa di Gradiente

Consideriamo un Perceptron SENZA la hard-threshold:

$$out(\vec{x}) = \sum_{i=0}^{n} w_i x_i = \vec{w} \cdot \vec{x}$$

e defi niamo una misura dell'errore commesso da un particolare vettore dei pesi:

Funzione Errore: $E[\vec{w}] = \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{(\vec{x}^{(i)}, t^{(i)}) \in Tr} \left(t^{(i)} - out(\vec{x}^{(i)}) \right)^2$

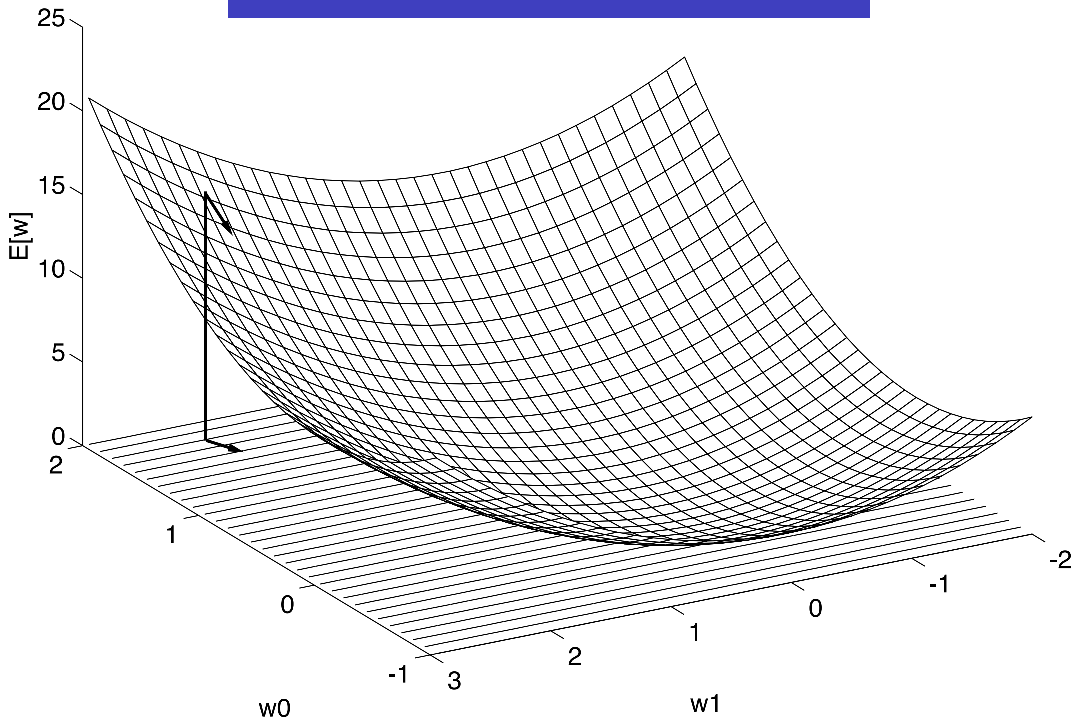
dove N_{Tr} è la cardinalità dell'insieme di apprendimento Tr.

La funzione errore di sopra misura lo scarto quadratico medio (diviso 2) del valore target da quello predetto dal neurone (out).

Ovviamente, se $\forall (\vec{x}^{(i)}, t^{(i)}) \in Tr$ si ha $out(\vec{x}^{(i)}) = t^{(i)} \rightarrow \; E[\vec{w}] = 0$

Quindi bisogna MINIMIZZARE $E[\vec{w}]$ rispetto a $\vec{w}$

Discesa di Gradiente



Idea base: partire da un $\vec{w}$ random e modificarlo nella direzione contraria al gradiente (che indica la direzione di crescita di $E[\vec{w}]$)

$$\underbrace{\nabla E[\vec{w}]}_{\text{gradiente}} \equiv \left[\frac{\partial E}{\partial w_0}, \frac{\partial E}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial E}{\partial w_n} \right], \qquad \Delta \vec{w} = -\eta \nabla E[\vec{w}], \qquad \Delta w_i = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_i}$$

Calcolo del gradiente

$$\frac{\partial E}{\partial w_i} = \frac{\partial}{\partial w_i} \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} (t^{(d)} - out^{(d)})^2$$

Calcolo del gradiente

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{\partial}{\partial w_i}\frac{1}{2N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}(t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\ &= \frac{1}{2N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}\frac{\partial}{\partial w_i}(t^{(d)} - out^{(d)})^2\end{aligned}$$

Calcolo del gradiente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{\partial}{\partial w_i} \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} (t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} 2(t^{(d)} - out^{(d)}) \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - out^{(d)})
\end{aligned}$$

Calcolo del gradiente

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{\partial}{\partial w_i} \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} (t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} 2(t^{(d)} - out^{(d)}) \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - out^{(d)}) \\
&= \frac{1}{N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} (t^{(d)} - out^{(d)}) \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - \vec{w} \cdot \vec{x}^{(d)})
\end{aligned}
$$

Calcolo del gradiente

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{\partial}{\partial w_i}\frac{1}{2N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}(t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}\frac{\partial}{\partial w_i}(t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}2(t^{(d)} - out^{(d)})\frac{\partial}{\partial w_i}(t^{(d)} - out^{(d)}) \\
&= \frac{1}{N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}(t^{(d)} - out^{(d)})\frac{\partial}{\partial w_i}(t^{(d)} - \vec{w}\cdot\vec{x}^{(d)}) \\
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{1}{N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}(t^{(d)} - out^{(d)})(-x_i^{(d)}) \\
&= -\frac{1}{N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}(t^{(d)} - out^{(d)})(x_i^{(d)})
\end{aligned}
$$

Discesa di Gradiente

Gradient-Descent(Tr, η)

ogni esempio di apprendimento è una coppia $(\vec{x}, t)$*, dove* $\vec{x}$ *è il vettore di valori in input, e* t *è il valore desiderato in output (target).* η *è il coefficiente di apprendimento (che ingloba* $\frac{1}{N_{Tr}}$*).*

- Assegna a w_i valori piccoli random
- Finché la condizione di terminazione non è verifi cata, fai
  - $\Delta w_i \leftarrow 0$
  - Per ogni $(\vec{x}, t)$ in Tr, fai
    - Presenta $\vec{x}$ al neurone e calcola l'output out
    - Per ogni w_i, fai

$$\Delta w_i \leftarrow \Delta w_i + \eta(t - out)x_i$$

  - Per ogni w_i, fai

$$w_i \leftarrow w_i + \Delta w_i$$

Discesa di Gradiente con Sigmoide

Consideriamo un Perceptron con funzione sigmoidale:

$$out(\vec{x}) = \sigma(\sum_{i=0}^{n} w_i x_i) = \sigma(\vec{w} \cdot \vec{x})$$

dove si ricorda che $\sigma(net) = \frac{1}{1+e^{-net}}$

Si noti che per $\sigma()$ vale la seguente relazione

$$\sigma'(net) = \frac{d\,\sigma(net)}{d\,net} = \sigma(net)(1 - \sigma(net))$$

e ricordiamo che (derivata di funzioni composte)

$$\frac{d\,f(g(x))}{d\,x} = \frac{d\,f(g(x))}{d\,g(x)} \frac{d\,g(x)}{d\,x}$$

Calcolo del gradiente con sigmoide

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{\partial}{\partial w_i} \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} (t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} 2(t^{(d)} - out^{(d)}) \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - out^{(d)})
\end{aligned}
$$

Calcolo del gradiente con sigmoide

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{\partial}{\partial w_i} \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} (t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} 2(t^{(d)} - out^{(d)}) \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - out^{(d)}) \\
&= \frac{1}{N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} (t^{(d)} - out^{(d)}) \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - \sigma(\vec{w} \cdot \vec{x}^{(d)}))
\end{aligned}
$$

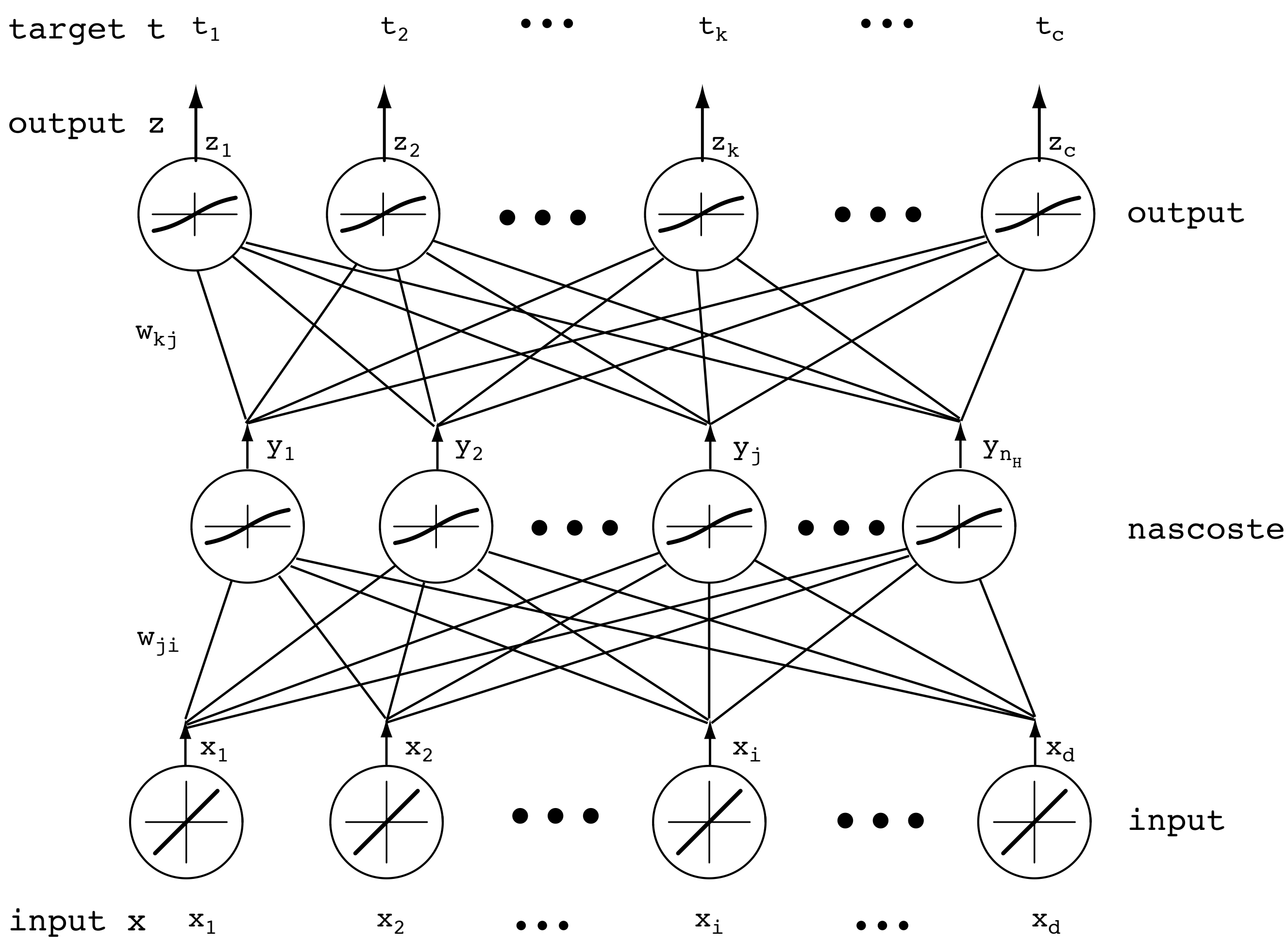
Calcolo del gradiente con sigmoide

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{\partial}{\partial w_i} \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} (t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} 2(t^{(d)} - out^{(d)}) \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - out^{(d)}) \\
&= \frac{1}{N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} (t^{(d)} - out^{(d)}) \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - \sigma(\vec{w} \cdot \vec{x}^{(d)})) \\
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{1}{N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} (t^{(d)} - out^{(d)})(-\frac{\partial \sigma(\vec{w} \cdot \vec{x}^{(d)})}{\partial \vec{w} \cdot \vec{x}^{(d)}} \frac{\partial \vec{w} \cdot \vec{x}^{(d)}}{\partial w_i})
\end{aligned}
$$

Calcolo del gradiente con sigmoide

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{\partial}{\partial w_i}\frac{1}{2N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}(t^{(d)}-out^{(d)})^2\\
&= \frac{1}{2N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}\frac{\partial}{\partial w_i}(t^{(d)}-out^{(d)})^2\\
&= \frac{1}{2N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}2(t^{(d)}-out^{(d)})\frac{\partial}{\partial w_i}(t^{(d)}-out^{(d)})\\
&= \frac{1}{N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}(t^{(d)}-out^{(d)})\frac{\partial}{\partial w_i}(t^{(d)}-\sigma(\vec{w}\cdot\vec{x}^{(d)}))\\
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{1}{N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}(t^{(d)}-out^{(d)})(-\frac{\partial\sigma(\vec{w}\cdot\vec{x}^{(d)})}{\partial\vec{w}\cdot\vec{x}^{(d)}}\frac{\partial\vec{w}\cdot\vec{x}^{(d)}}{\partial w_i})\\
&= -\frac{1}{N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}(t^{(d)}-out^{(d)})\sigma(\vec{w}\cdot\vec{x}^{(d)})(1-\sigma(\vec{w}\cdot\vec{x}^{(d)}))x_i^{(d)}
\end{aligned}
$$

Reti Neurali Feed-forward: notazione



Reti Neurali Feed-forward: notazione

- d unità di ingresso, dimensione dei dati in ingresso $\vec{x} \equiv (x_1, \ldots, x_d)$
  ($d+1$ se si include la soglia nel vettore dei pesi $\vec{x}' \equiv (x_0, x_1, \ldots, x_d)$)
- N_H unità nascoste (con output $\vec{y} \equiv (y_1, \ldots, y_{N_H})$)
- c unità di output, dimensione dei dati in output $\vec{z} \equiv (z_1, \ldots, z_c)$
- c, dimensione dei dati desiderati $\vec{t} \equiv (t_1, \ldots, t_c)$
- w_{ji} peso dalla unità di ingresso i alla unità nascosta j
- w_{kj} peso dalla unità nascosta j alla unità di output k

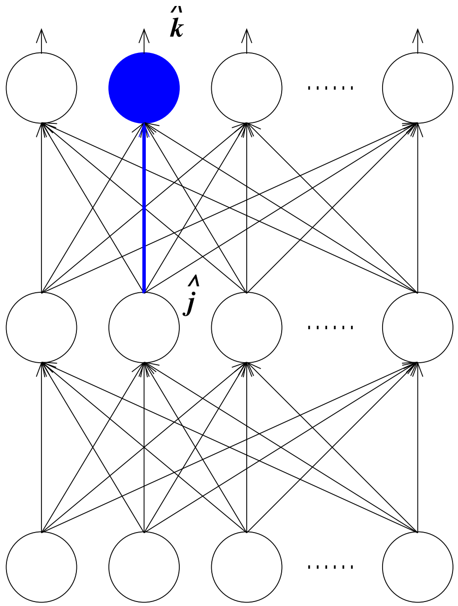
La funzione errore, considerando che si hanno c unità di output, diventa

$$E[\vec{w}] = \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{(\vec{x}^{(p)}, \vec{t}^{(p)}) \in Tr} \sum_{k=1}^{c} \left(t_k^{(p)} - z_k(\vec{x}^{(p)}) \right)^2$$

Calcolo del gradiente per i pesi di una unità di output

Fissiamo gli indici $\hat{k}$ e $\hat{j}$:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} = \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

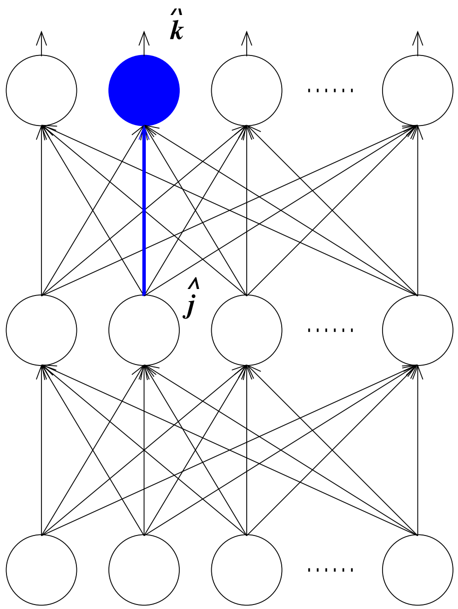


Calcolo del gradiente per i pesi di una unità di output

Fissiamo gli indici $\hat{k}$ e $\hat{j}$:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} = \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

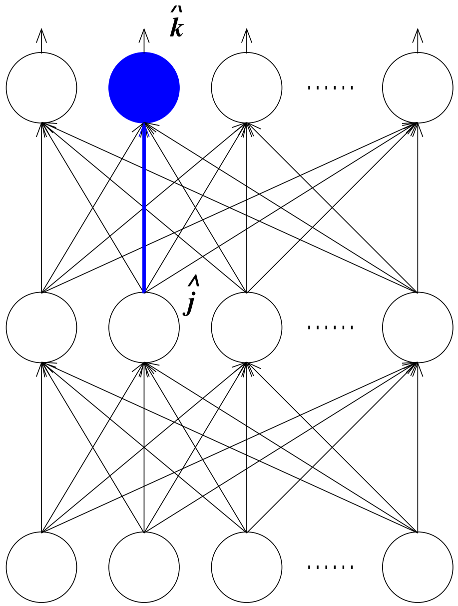
$$= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$



Calcolo del gradiente per i pesi di una unità di output

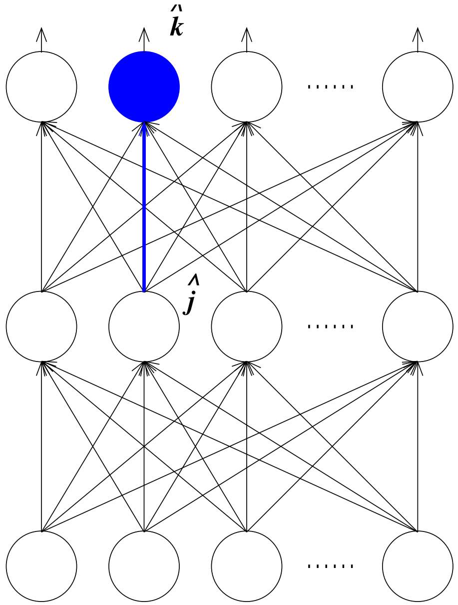
Fissiamo gli indici $\hat{k}$ e $\hat{j}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} &= \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \\
&= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \\
&= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} 2(t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} (t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)})
\end{aligned}$$



Calcolo del gradiente per i pesi di una unità di output

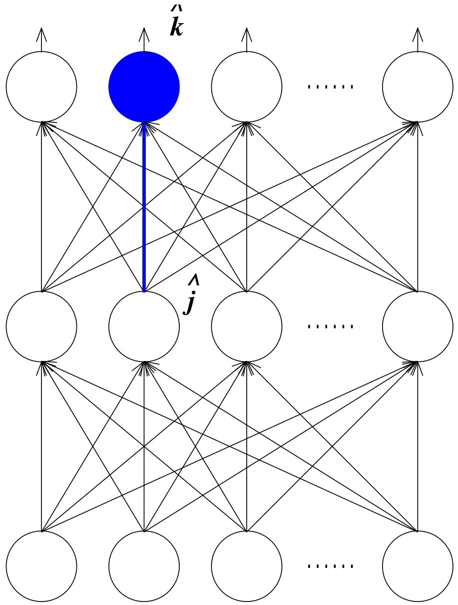
Fissiamo gli indici $\hat{k}$ e $\hat{j}$:



$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} &= \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \\
&= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \\
&= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} 2(t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} (t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)}) \\
&= \frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} (t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} (t_{\hat{k}}^{(p)} - \sigma(\vec{w}_{\hat{k}} \cdot \vec{y}^{(p)}))
\end{aligned}
$$

Calcolo del gradiente per i pesi di una unità di output

Fissiamo gli indici $\hat{k}$ e $\hat{j}$:

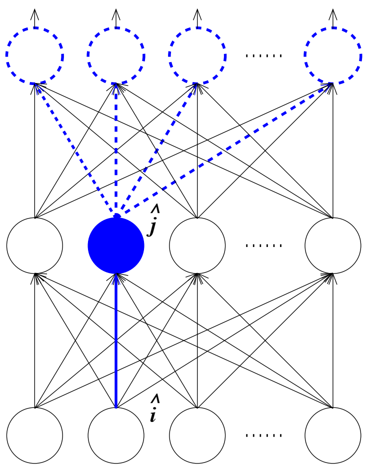


$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} &= \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \\
&= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \\
&= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} 2(t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} (t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)}) \\
&= \frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} (t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} (t_{\hat{k}}^{(p)} - \sigma(\vec{w}_{\hat{k}} \cdot \vec{y}^{(p)})) \\
&= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} (t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_{\hat{k}} \cdot \vec{y}^{(p)}) y_{\hat{j}}^{(p)}
\end{aligned}
$$

Calcolo del gradiente per i pesi di una unità nascosta

Fissiamo gli indici $\hat{j}$ e $\hat{i}$:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} = \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

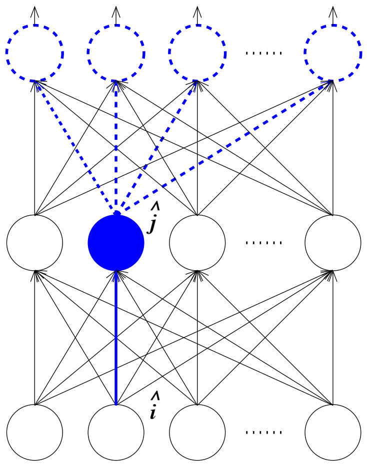


Calcolo del gradiente per i pesi di una unità nascosta

Fissiamo gli indici $\hat{j}$ e $\hat{i}$:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} = \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

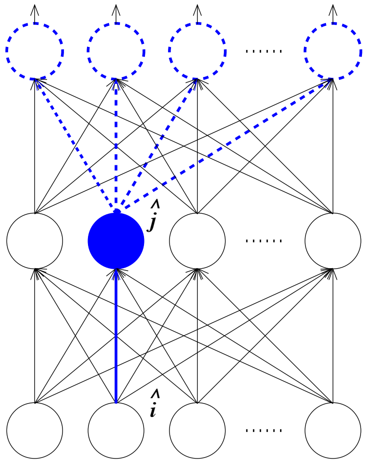
$$= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$



Calcolo del gradiente per i pesi di una unità nascosta

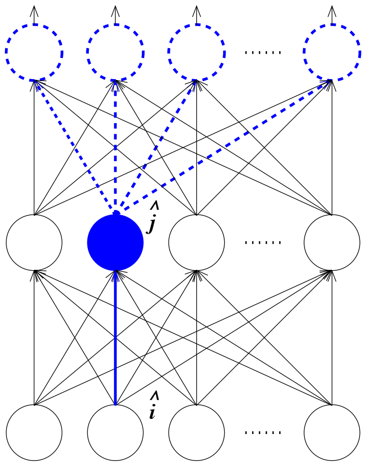
Fissiamo gli indici $\hat{j}$ e $\hat{i}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} &= \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p\in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \\
&= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p\in Tr} \sum_{k=1}^{c} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \\
&= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p\in Tr} \sum_{k=1}^{c} 2(t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (-z_k^{(p)})
\end{aligned}$$



Calcolo del gradiente per i pesi di una unità nascosta

Fissiamo gli indici $\hat{j}$ e $\hat{i}$:

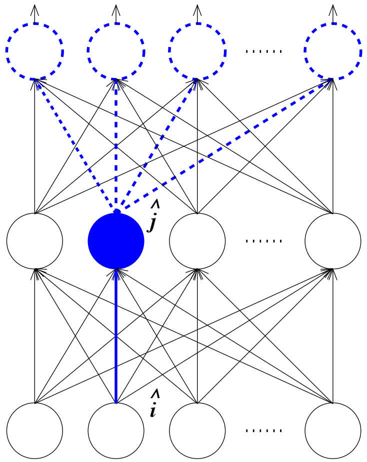


$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} &= \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \\
&= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \\
&= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} 2(t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (-z_k^{(p)}) \\
&= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}
\end{aligned}$$

Calcolo del gradiente per i pesi di una unità nascosta

Fissiamo gli indici $\hat{j}$ e $\hat{i}$:

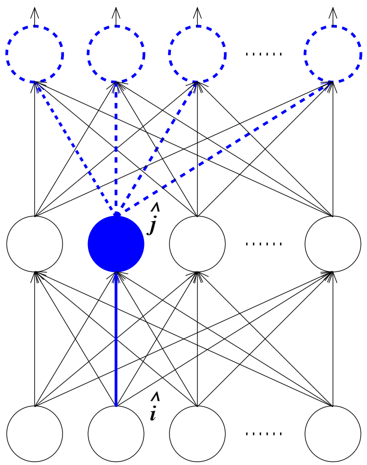
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} &= \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \\
&= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \\
&= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} 2(t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (-z_k^{(p)}) \\
&= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \sum_{j=1}^{N_H} w_{kj} y_j^{(p)}
\end{aligned}
$$



Calcolo del gradiente per i pesi di una unità nascosta

Fissiamo gli indici $\hat{j}$ e $\hat{i}$:

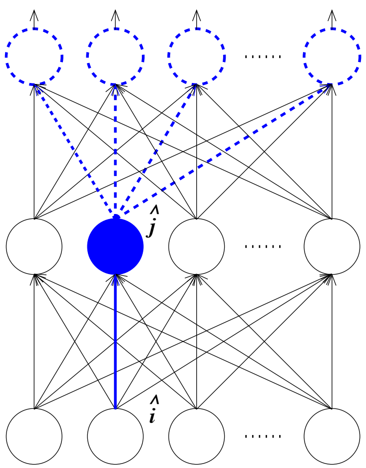
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} &= \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \\
&= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \\
&= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} 2(t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (-z_k^{(p)}) \\
&= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \sum_{j=1}^{N_H} w_{kj} y_j^{(p)} \\
&= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) w_{k\hat{j}} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} y_{\hat{j}}^{(p)}
\end{aligned}
$$



Calcolo del gradiente per i pesi di una unità nascosta

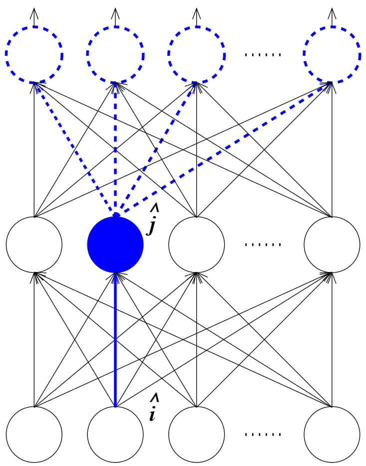
Fissiamo gli indici $\hat{j}$ e $\hat{i}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} &= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} 2(t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (-z_k^{(p)}) \\
&= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \sum_{j=1}^{N_H} w_{kj} y_j^{(p)} \\
&= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) w_{k\hat{j}} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} y_{\hat{j}}^{(p)} \\
&= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) w_{k\hat{j}} \sigma'(\vec{w}_{\hat{j}} \cdot \vec{x}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (\vec{w}_{\hat{j}} \cdot \vec{x}^{(p)})
\end{aligned}
$$



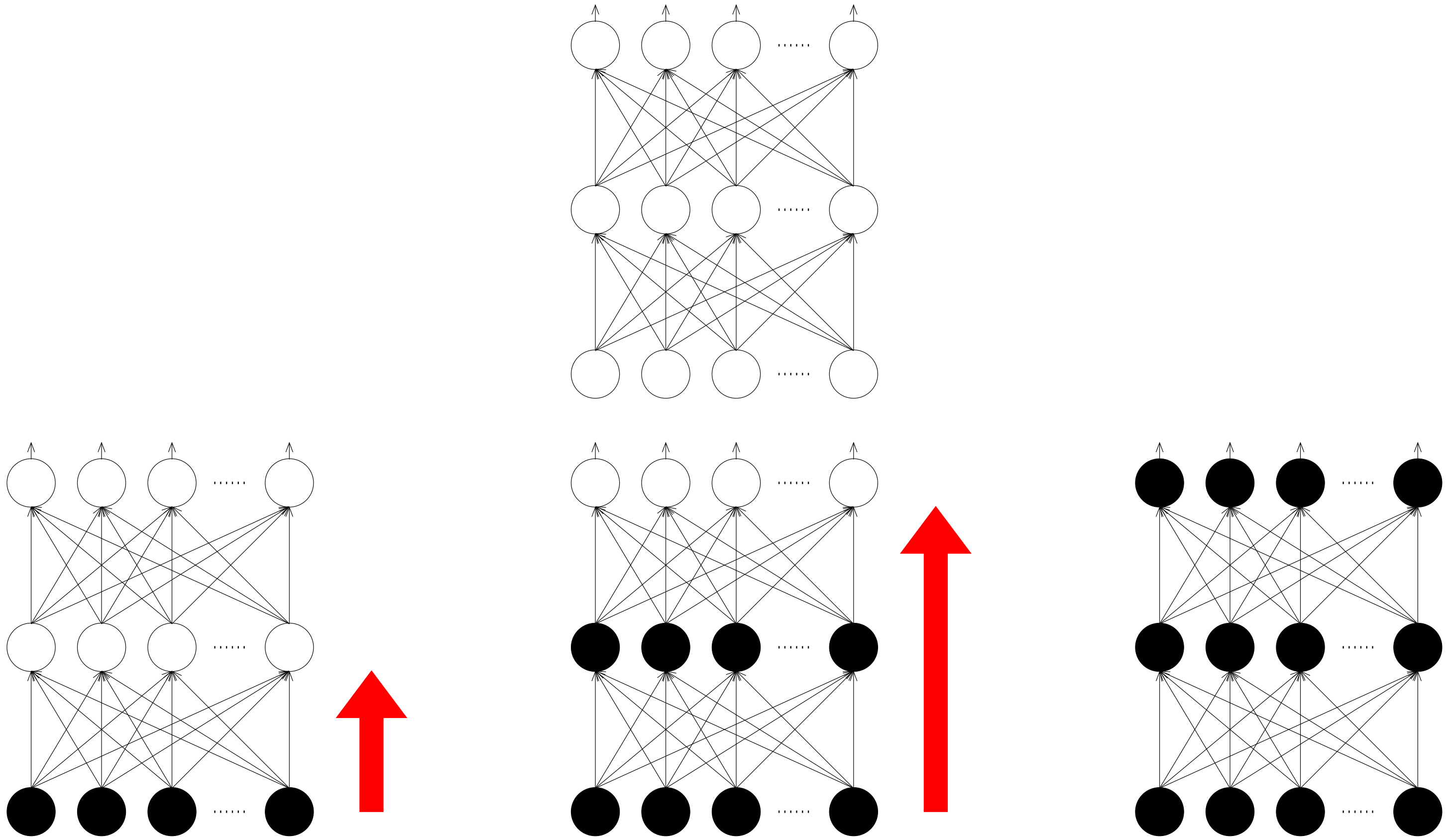
Calcolo del gradiente per i pesi di una unità nascosta

Fissiamo gli indici $\hat{j}$ e $\hat{i}$:

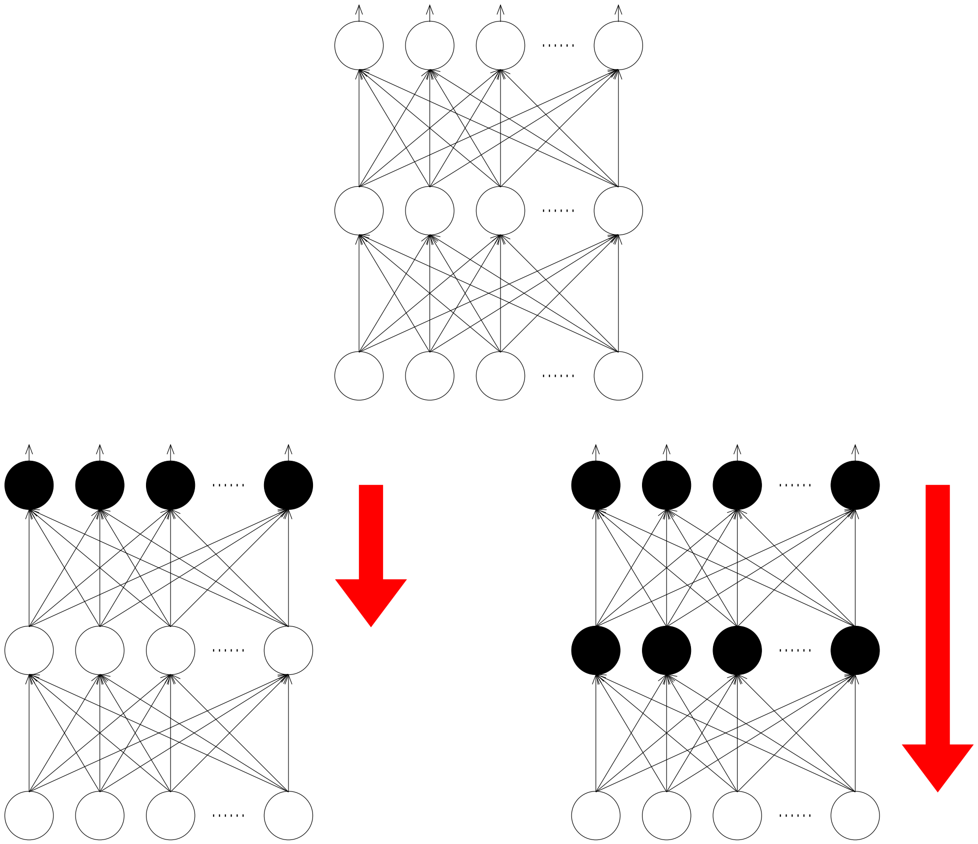


$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} &= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p\in Tr} \sum_{k=1}^{c} 2(t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}}(-z_k^{(p)}) \\
&= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p\in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \sum_{j=1}^{N_H} w_{kj} y_j^{(p)} \\
&= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p\in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) w_{k\hat{j}} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} y_{\hat{j}}^{(p)} \\
&= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p\in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) w_{k\hat{j}} \sigma'(\vec{w}_{\hat{j}} \cdot \vec{x}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (\vec{w}_{\hat{j}} \cdot \vec{x}^{(p)}) \\
&= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p\in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) w_{k\hat{j}} \sigma'(\vec{w}_{\hat{j}} \cdot \vec{x}^{(p)}) x_{\hat{i}}^{(p)}
\end{aligned}
$$

Reti Neurali Feed-forward: Fase Forward



Reti Neurali Feed-forward: Fase Backward



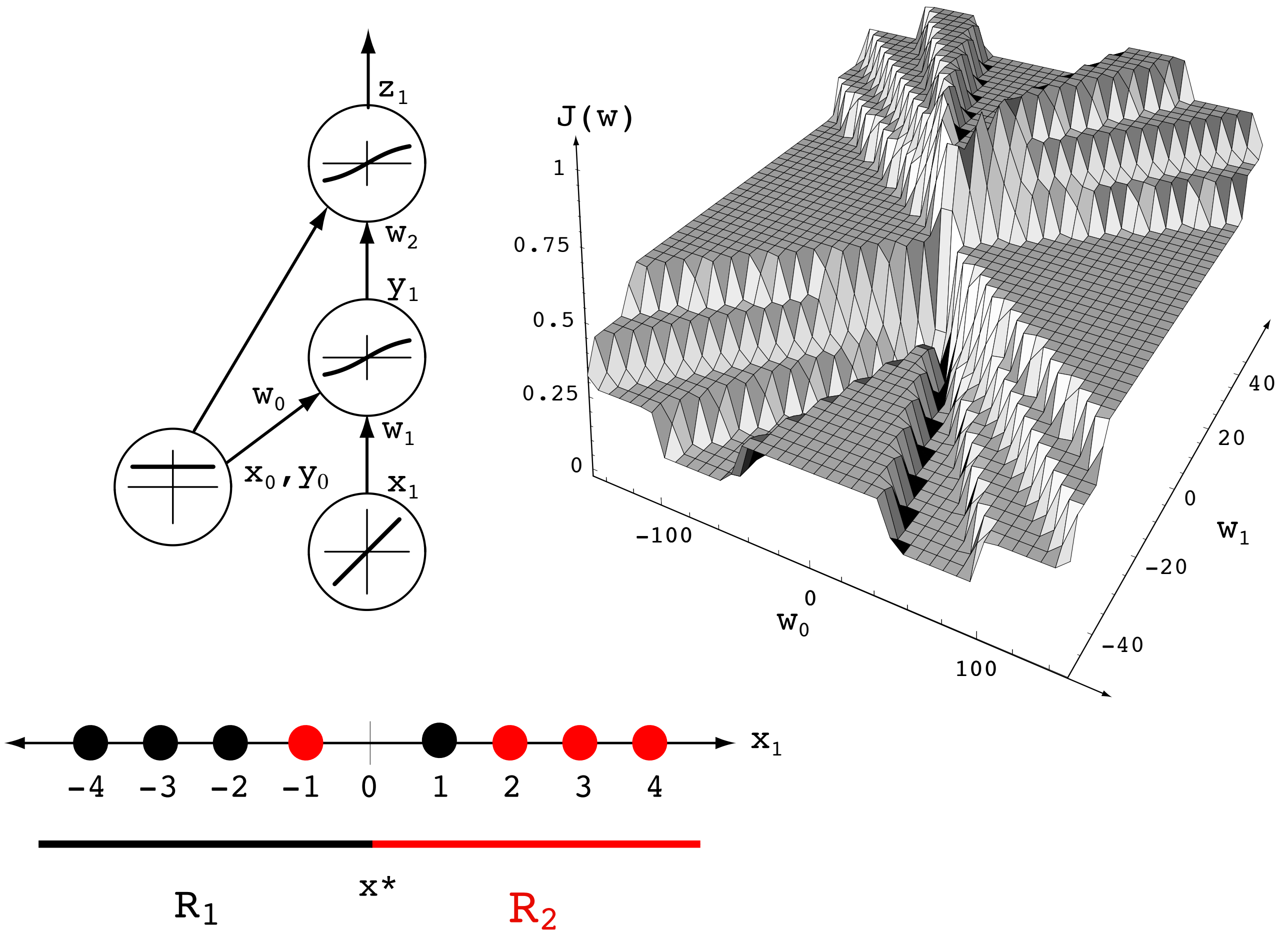
Algoritmo Back-Propagation (uno strato nascosto, stocastico)

Back-Propagation-1hl-stocastico(Tr, η, *topologia rete*)

- Inizializza tutti i pesi a valori random piccoli
- Finché la condizione di terminazione non è verifi cata, fai
  - Per ogni $(\vec{x}, \vec{t})$ in Tr, fai
    1. presenta $\vec{x}$ alla rete e calcola il corrispondente output
    2. Per ogni unità di output k
    $$\delta_k \leftarrow o_k(1 - o_k)(t_k - o_k)$$
    3. Per ogni unità nascosta j
    $$\delta_j \leftarrow o_j(1 - o_j) \sum_{k \in outputs} w_{k,j} \delta_k$$
    4. aggiorna tutti i pesi $w_{p,q}$ della rete

$$w_{s,q} \leftarrow w_{s,q} + \eta \Delta w_{s,q} \text{ dove } \Delta w_{s,q} = \begin{cases} \delta_s x_q & \text{se } s \in nascoste \\ \delta_s y_q & \text{se } s \in outputs \end{cases}$$

Esempio di Funzione Errore



Discesa di Gradiente Batch e Stocastica

Batch:

Fai finché condizione di terminazione non soddisfatta

1. calcola $\nabla E_{Tr}[\vec{w}]$
2. $\vec{w} \leftarrow \vec{w} - \eta \nabla E_{Tr}[\vec{w}]$

Stocastica (Incrementale):

Fai finché condizione di terminazione non soddisfatta

- Per ogni esempio di apprendimento p in Tr
  1. calcola $\nabla E_{p \in Tr}[\vec{w}]$
  2. $\vec{w} \leftarrow \vec{w} - \eta \nabla E_{p \in Tr}[\vec{w}]$

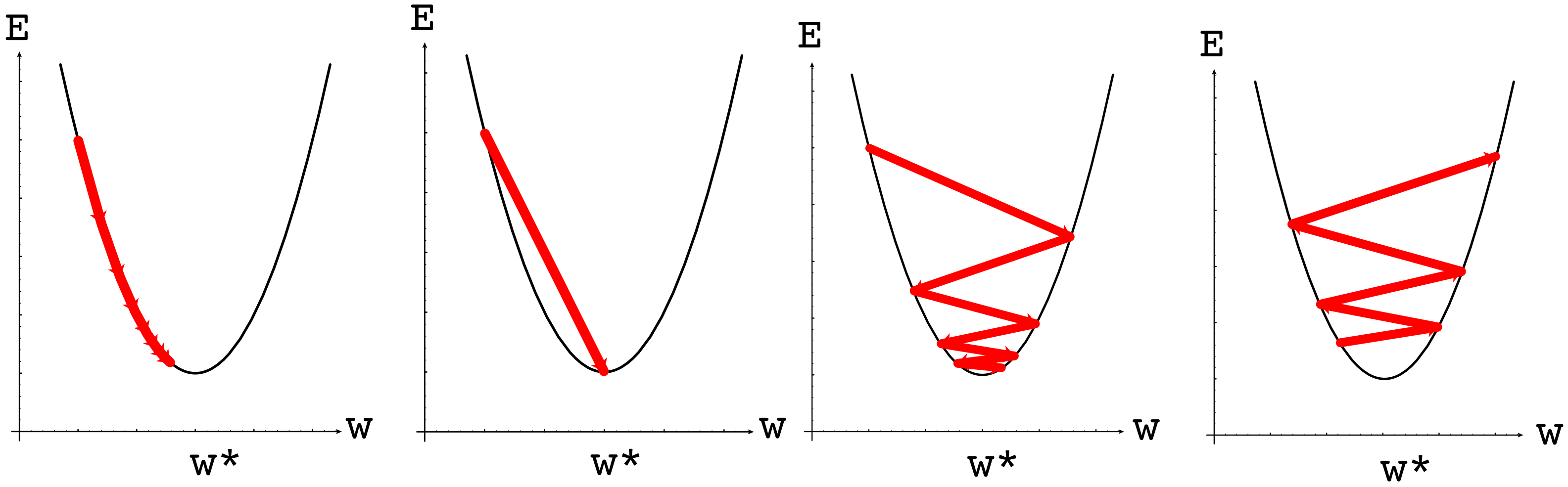
dove

$$E_{Tr}[\vec{w}] \equiv \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \qquad E_{p \in Tr}[\vec{w}] \equiv \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

La discesa di gradiente *Stocastica* (gradiente istantaneo) può approssimare quella *Batch* (gradiente esatto) con precisione arbitraria se η è sufficientemente piccolo

Alcuni Problemi ...

- Scelta della topologia della rete $\longrightarrow$ determina lo Spazio delle Ipotesi;
- Scelta del passo di discesa (valore di η):

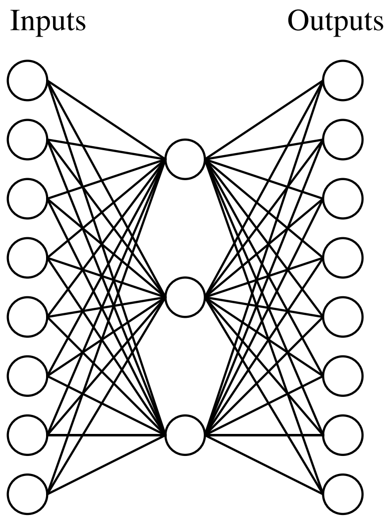


- apprendimento lento..., ma calcolo di output veloce
- $\boxed{\text{MINIMI LOCALI !!}}$

Bias Induttivo: sia nella rappresentazione che nella ricerca

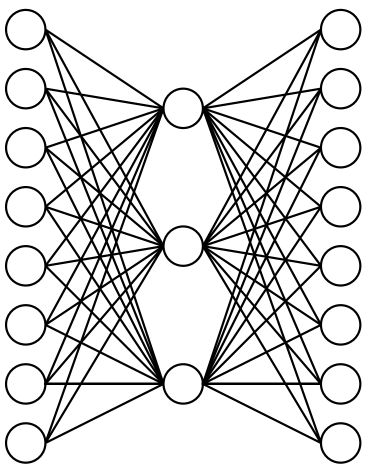
Esempio di Apprendimento per Rete Feed-forward

Compressione di Dati



Input	Output
00000001	00000001
00000010	00000010
00000100	00000100
00001000	00001000
00010000	00010000
00100000	00100000
01000000	01000000
10000000	10000000

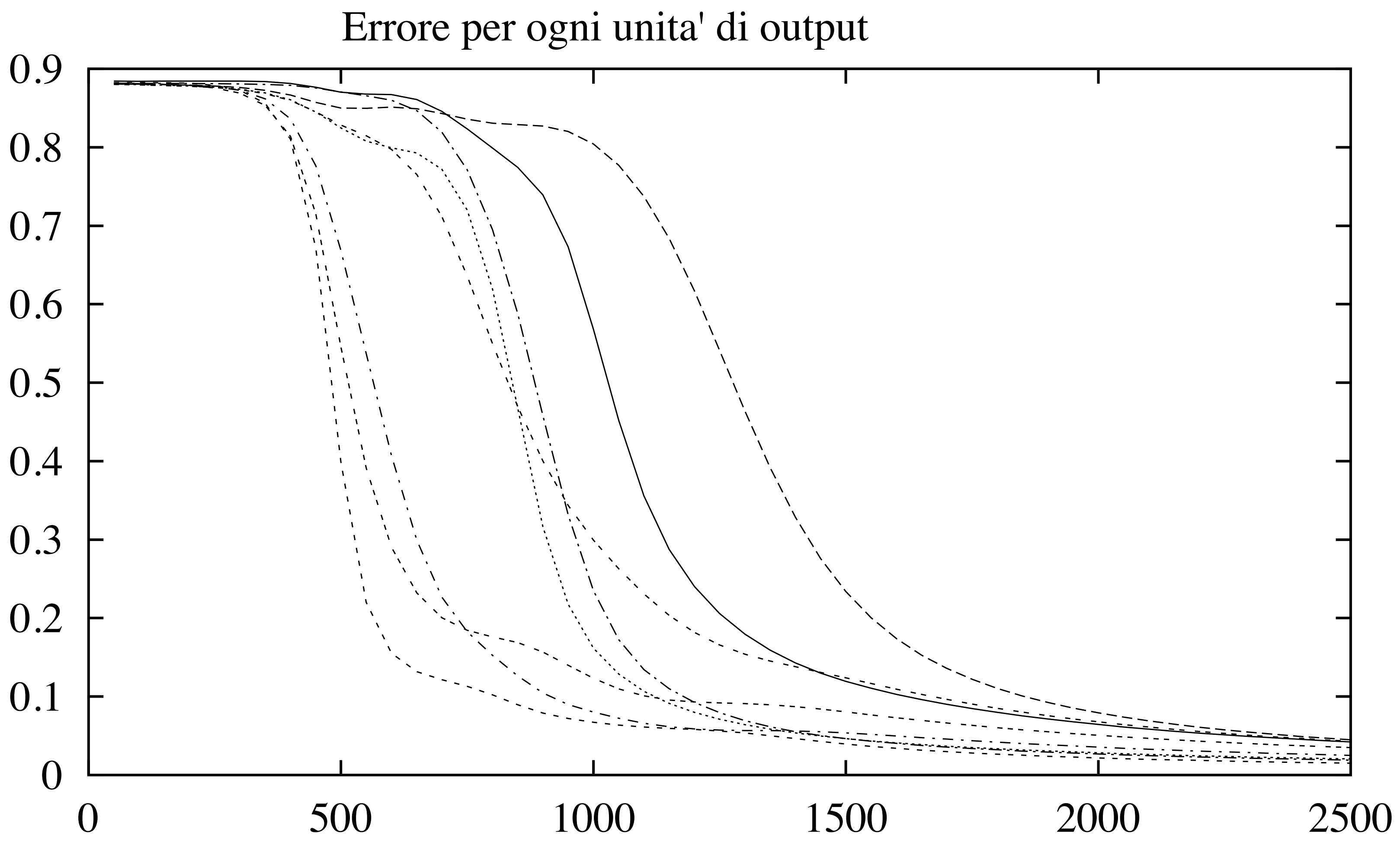
Esempio di Apprendimento per Rete Feed-forward



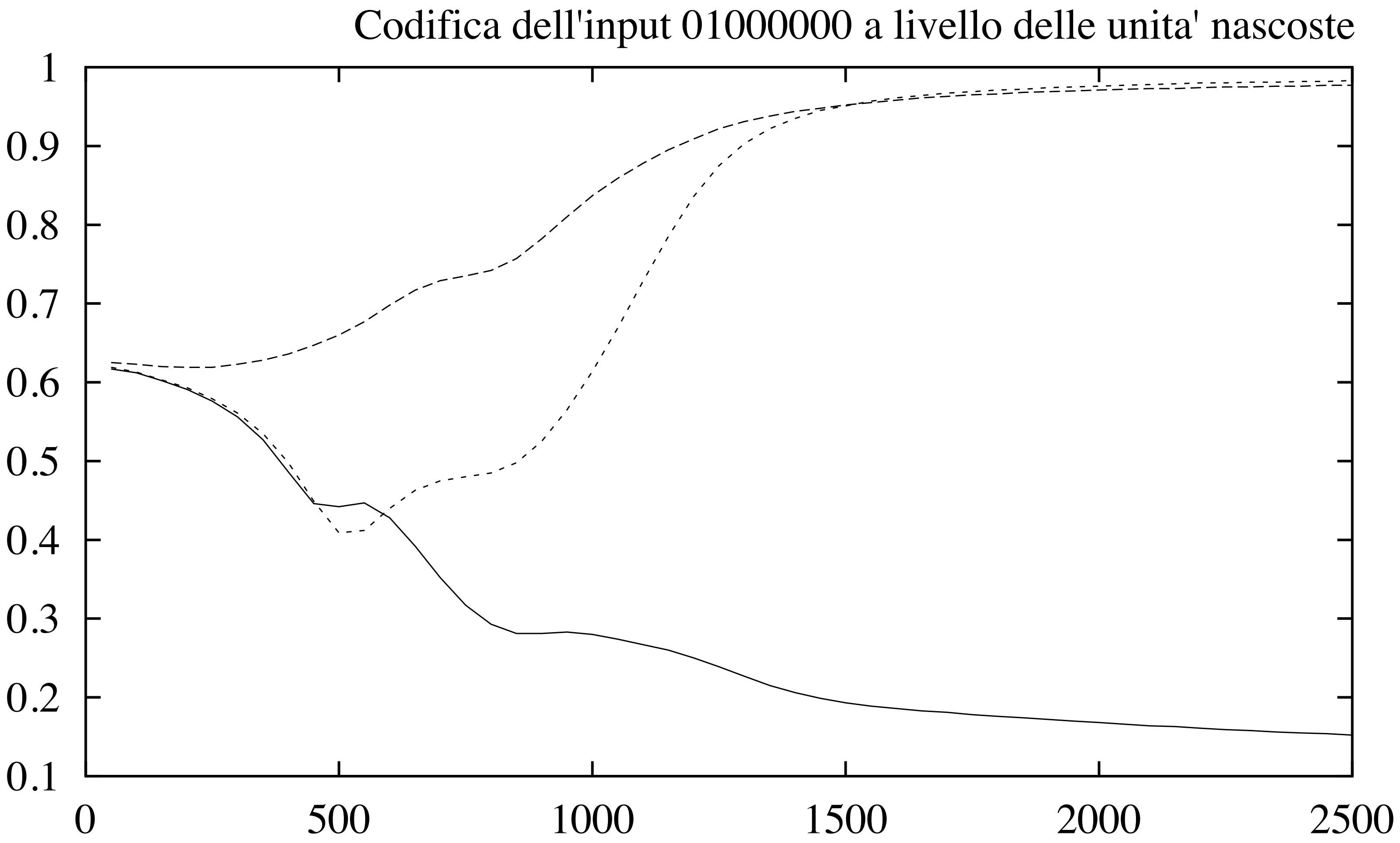
Compressione di Dati

Input		Valori Nascosti		Output
10000000	$\rightarrow$	0.89 0.04 0.08	$\rightarrow$	10000000
01000000	$\rightarrow$	0.01 0.11 0.88	$\rightarrow$	01000000
00100000	$\rightarrow$	0.01 0.97 0.27	$\rightarrow$	00100000
00010000	$\rightarrow$	0.99 0.97 0.71	$\rightarrow$	00010000
00001000	$\rightarrow$	0.03 0.05 0.02	$\rightarrow$	00001000
00000100	$\rightarrow$	0.22 0.99 0.99	$\rightarrow$	00000100
00000010	$\rightarrow$	0.80 0.01 0.98	$\rightarrow$	00000010
00000001	$\rightarrow$	0.60 0.94 0.01	$\rightarrow$	00000001

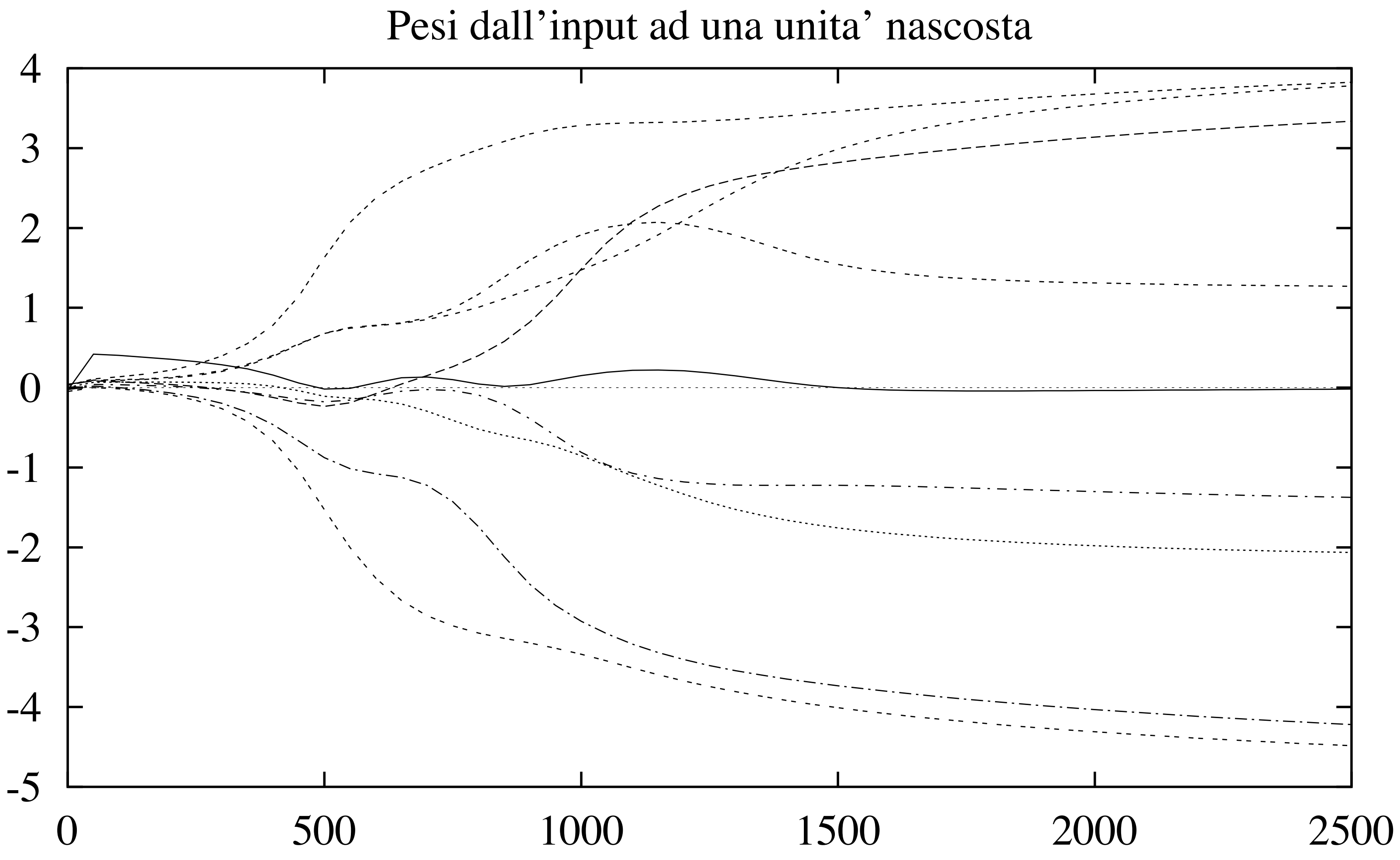
Curve di Apprendimento



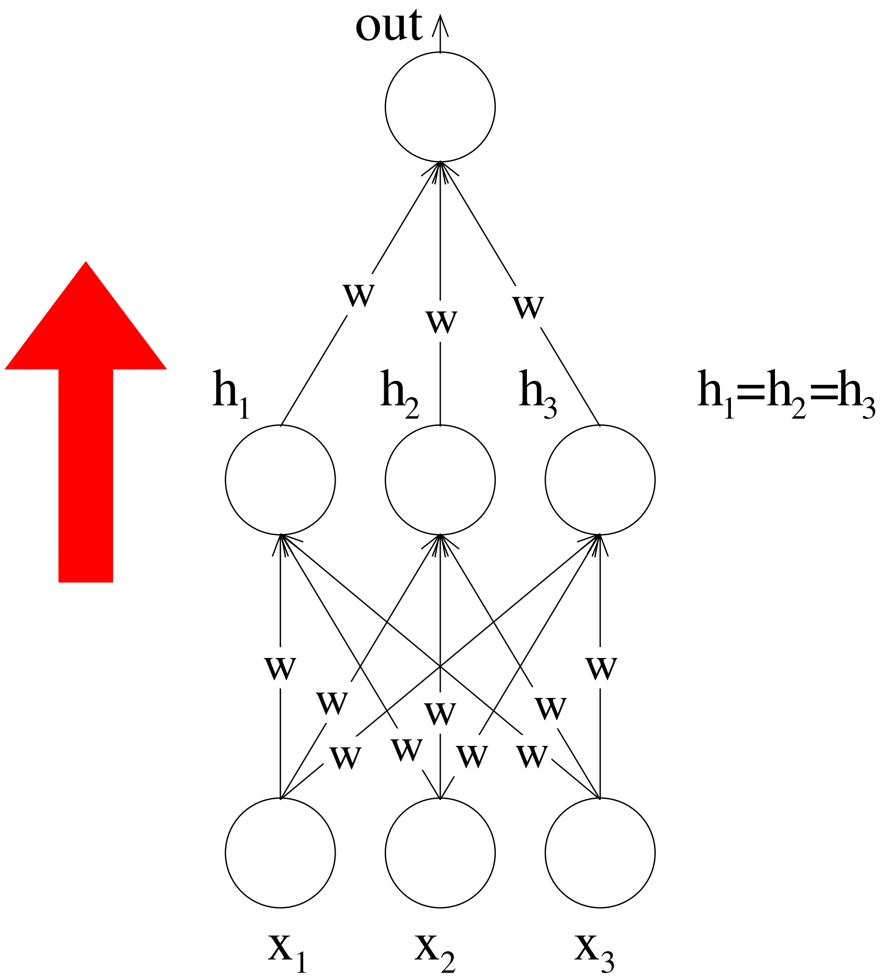
Curve di Apprendimento



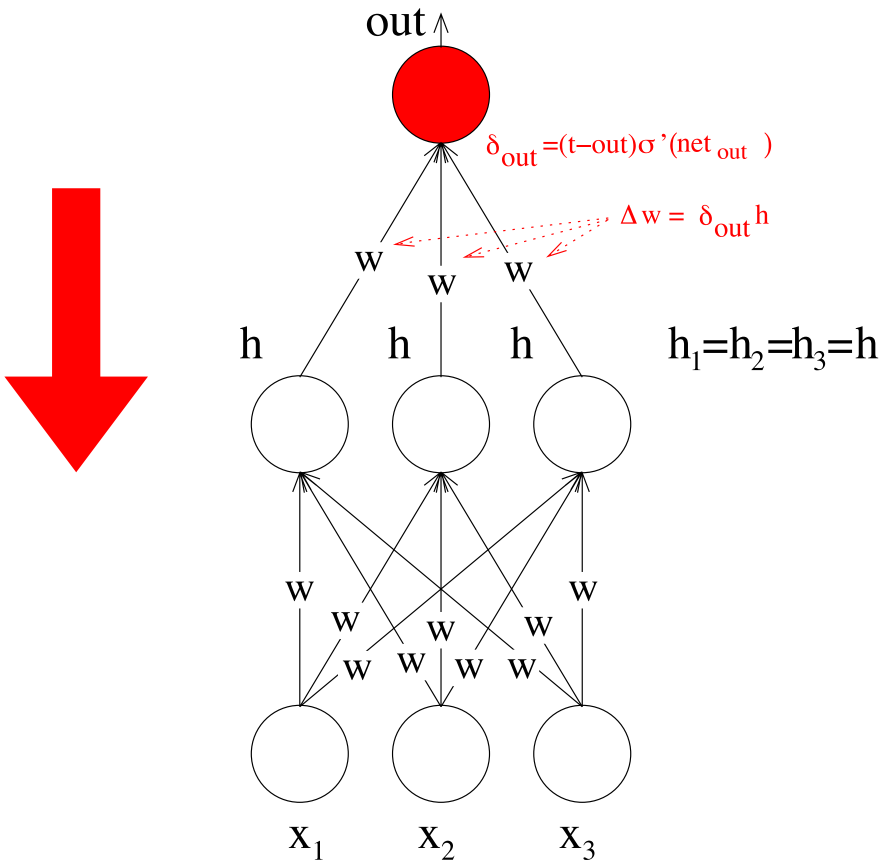
Curve di Apprendimento



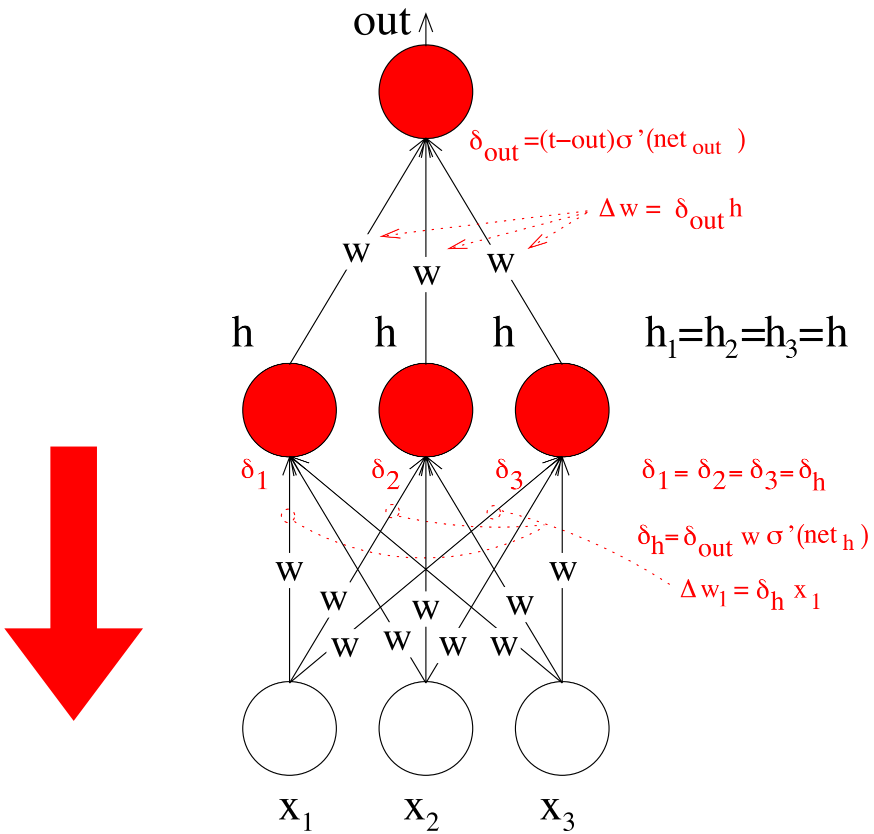
Simmetrie



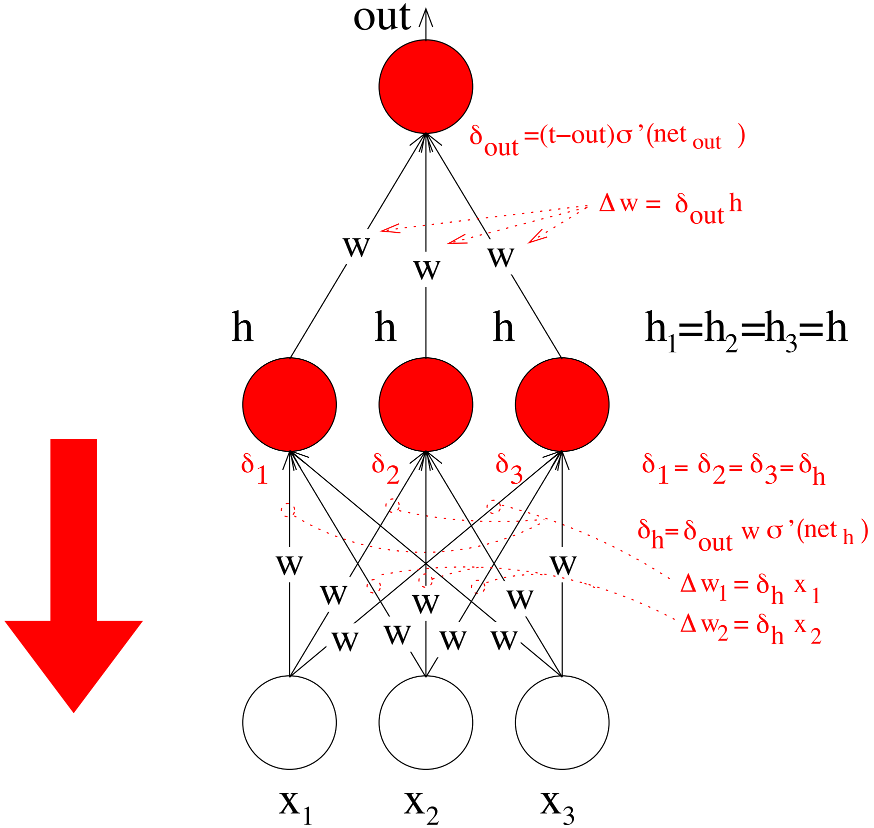
Simmetrie


out
$\delta_{out} = (t - out)\sigma'(net_{out})$
$\Delta w = \delta_{out} h$
w
w
w
h
h
h
$h_1 = h_2 = h_3 = h$
w
w
w
w
w
w
w
w
w
x_1
x_2
x_3

Simmetrie


out
δout =(t−out)σ'(net out)
Δw = δout h
w
w
w
h
h
h
h1=h2=h3=h
δ1
δ2
δ3
δ1 = δ2 = δ3 = δh
δh = δout w σ'(net h)
Δw1 = δh x1
w
w
w
w
w
w
w
w
w
x1
x2
x3

Simmetrie



out
δ_{out} =(t−out)σ '(net $_{out}$)
Δ w = δ_{out} h
w
w
w
h
h
h
h_1=h_2=h_3=h
δ_1
δ_2
δ_3
δ_1 = δ_2= δ_3= δ_h
δ_h= δ_{out} w σ '(net $_h$)
Δ w_1 = δ_h x_1
Δ w_2 = δ_h x_2
w
w
w
w
w
w
w
w
w
x_1
x_2
x_3