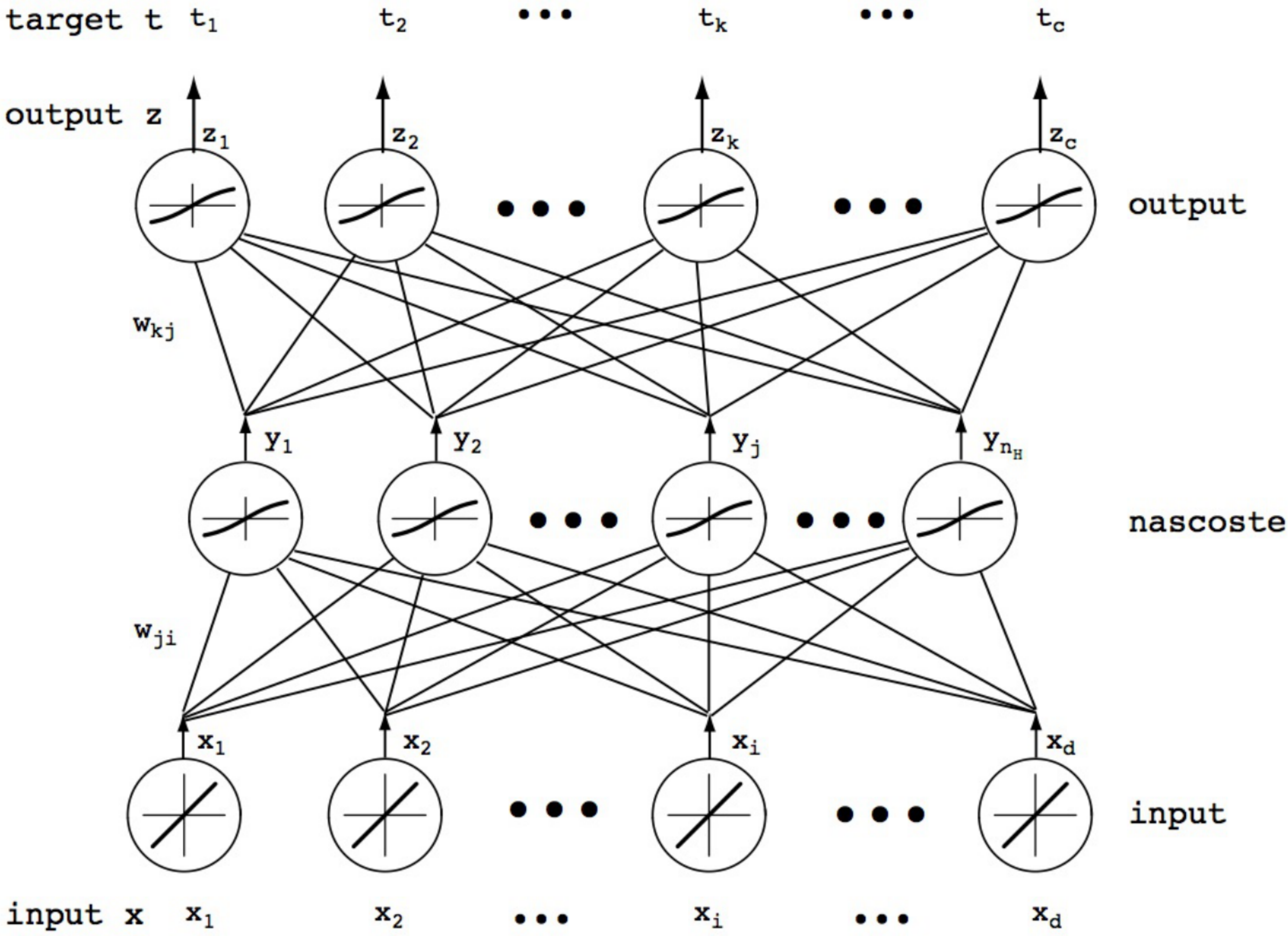

target t t_1 t_2 ... t_k ... t_c
output z
z_1 z_2 z_k z_c
output
w_{kj}
y_1 y_2 y_j y_{n_H}
nascoste
w_{ji}
x_1 x_2 x_i x_d
input
input x x_1 x_2 ... x_i ... x_d

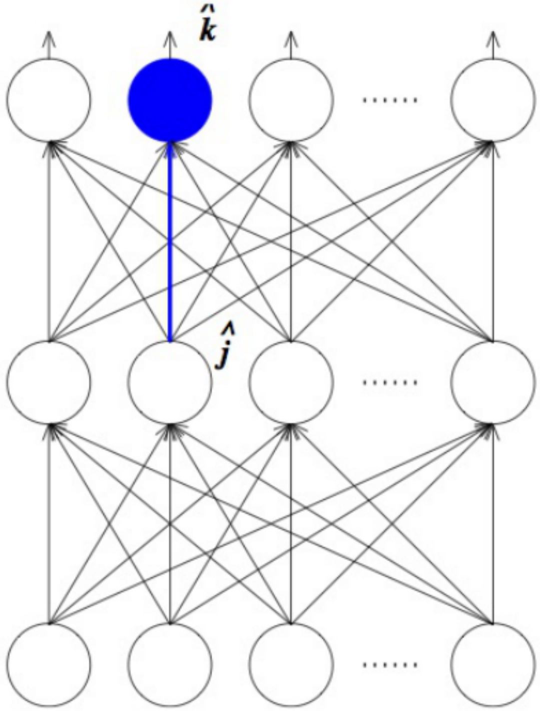
- d unità di ingresso, dimensione dei dati in ingresso $\vec{x} \equiv (x_1, \ldots, x_d)$ ($d+1$ se si include la soglia nel vettore dei pesi $\vec{x}' \equiv (x_0, x_1, \ldots, x_d)$)
- N_H unità nascoste (con output $\vec{y} \equiv (y_1, \ldots, y_{N_H})$)
- c unità di output, dimensione dei dati in output $\vec{z} \equiv (z_1, \ldots, z_c)$
- c, dimensione dei dati desiderati $\vec{t} \equiv (t_1, \ldots, t_c)$
- w_{ji} peso dalla unità di ingresso i alla unità nascosta j
- w_{kj} peso dalla unità nascosta j alla unità di output k

La funzione errore, considerando che si hanno c unità di output, diventa

$$E[\vec{w}] = \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{(\vec{x}^{(p)}, \vec{t}^{(p)}) \in Tr} \sum_{k=1}^{c} \left(t_k^{(p)} - z_k(\vec{x}^{(p)}) \right)^2$$

Calcolo del gradiente per i pesi di una unità di output

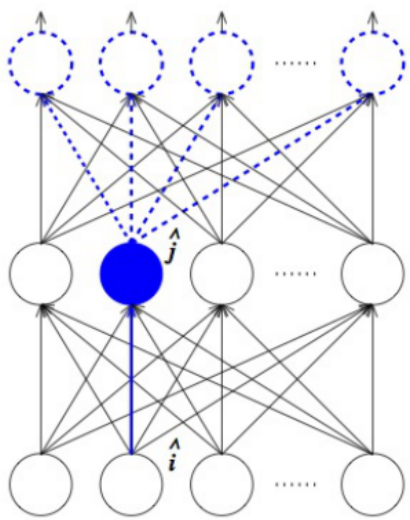
Fissiamo gli indici $\hat{k}$ e $\hat{j}$:



$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} &= \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \\
&= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \\
&= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} 2(t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} (t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)}) \\
&= \frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} (t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} (t_{\hat{k}}^{(p)} - \sigma(\vec{w}_{\hat{k}} \cdot \vec{y}^{(p)})) \\
&= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} (t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_{\hat{k}} \cdot \vec{y}^{(p)}) y_{\hat{j}}^{(p)}
\end{aligned}$$

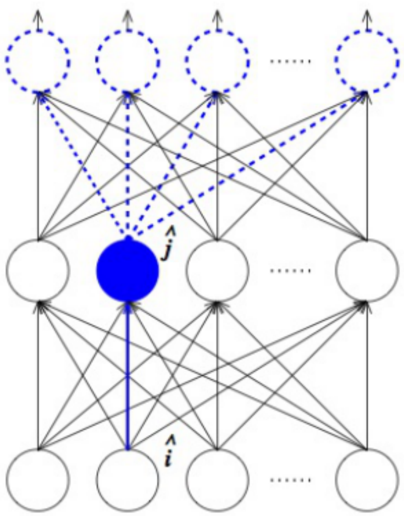
Calcolo del gradiente per i pesi di una unità nascosta

Fissiamo gli indici $\hat{j}$ e $\hat{i}$:



$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} &= \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \\
&= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \\
&= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} 2(t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (-z_k^{(p)}) \\
&= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \sum_{j=1}^{N_H} w_{kj} y_j^{(p)} \\
&= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) w_{k\hat{j}} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} y_{\hat{j}}^{(p)}
\end{aligned}
$$

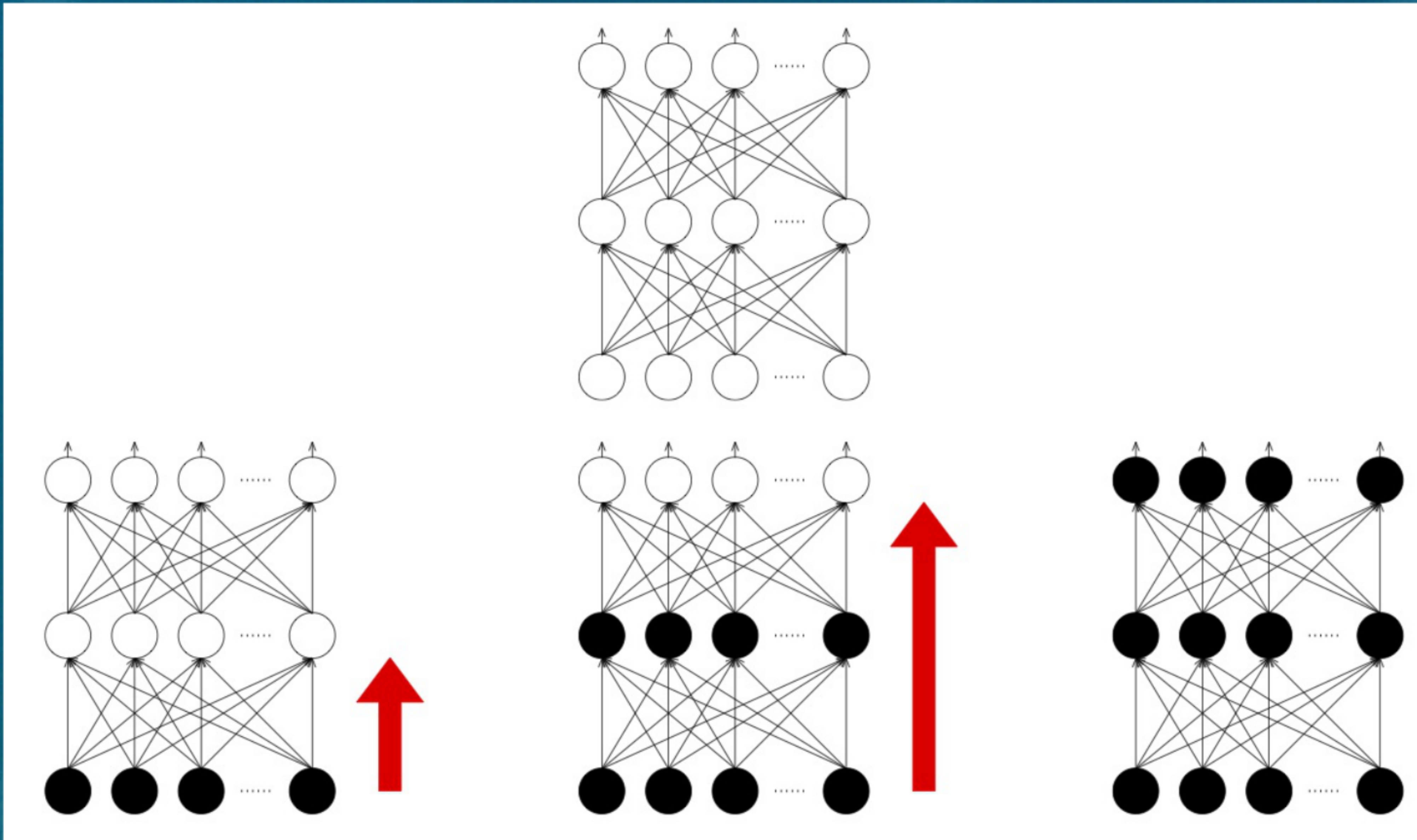
$$
= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum \sum^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) w_{k\hat{j}} \sigma'(\vec{w}_{\hat{j}} \cdot \vec{x}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (\vec{w}_{\hat{j}} \cdot \vec{x}^{(p)})
$$



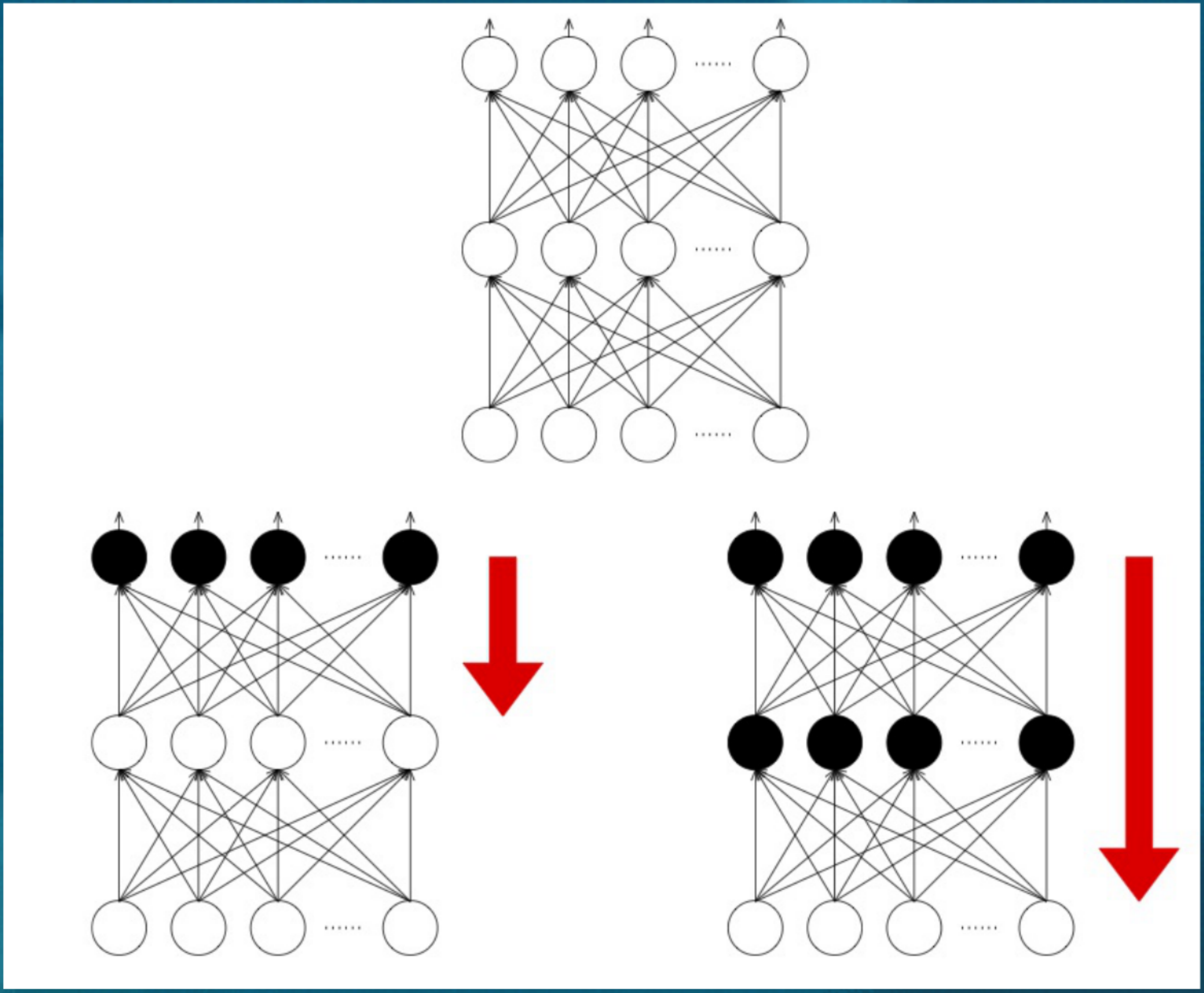
$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p\in Tr} \sum_{k=1}^{c} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \\
&= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p\in Tr} \sum_{k=1}^{c} 2(t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (-z_k^{(p)}) \\
&= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p\in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \sum_{j=1}^{N_H} w_{kj} y_j^{(p)} \\
&= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p\in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) w_{k\hat{j}} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} y_{\hat{j}}^{(p)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p\in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) w_{k\hat{j}} \sigma'(\vec{w}_{\hat{j}} \cdot \vec{x}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (\vec{w}_{\hat{j}} \cdot \vec{x}^{(p)}) \\
&= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p\in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) w_{k\hat{j}} \sigma'(\vec{w}_{\hat{j}} \cdot \vec{x}^{(p)}) x_{\hat{i}}^{(p)}
\end{aligned}
$$

Fase Forward



Fase Backward



Rete con uno strato nascosto e apprendimento stocastico

Back-Propagation-1hl-stocastico(Tr, η, *topologia rete*)

- Inizializza tutti i pesi a valori random piccoli
- Finché la condizione di terminazione non è verifi cata, fai
  - Per ogni $(\vec{x}, \vec{t})$ in Tr, fai
    1. presenta $\vec{x}$ alla rete e calcola il corrispondente output
    2. Per ogni unità di output k

$$\delta_k \leftarrow o_k(1 - o_k)(t_k - o_k)$$

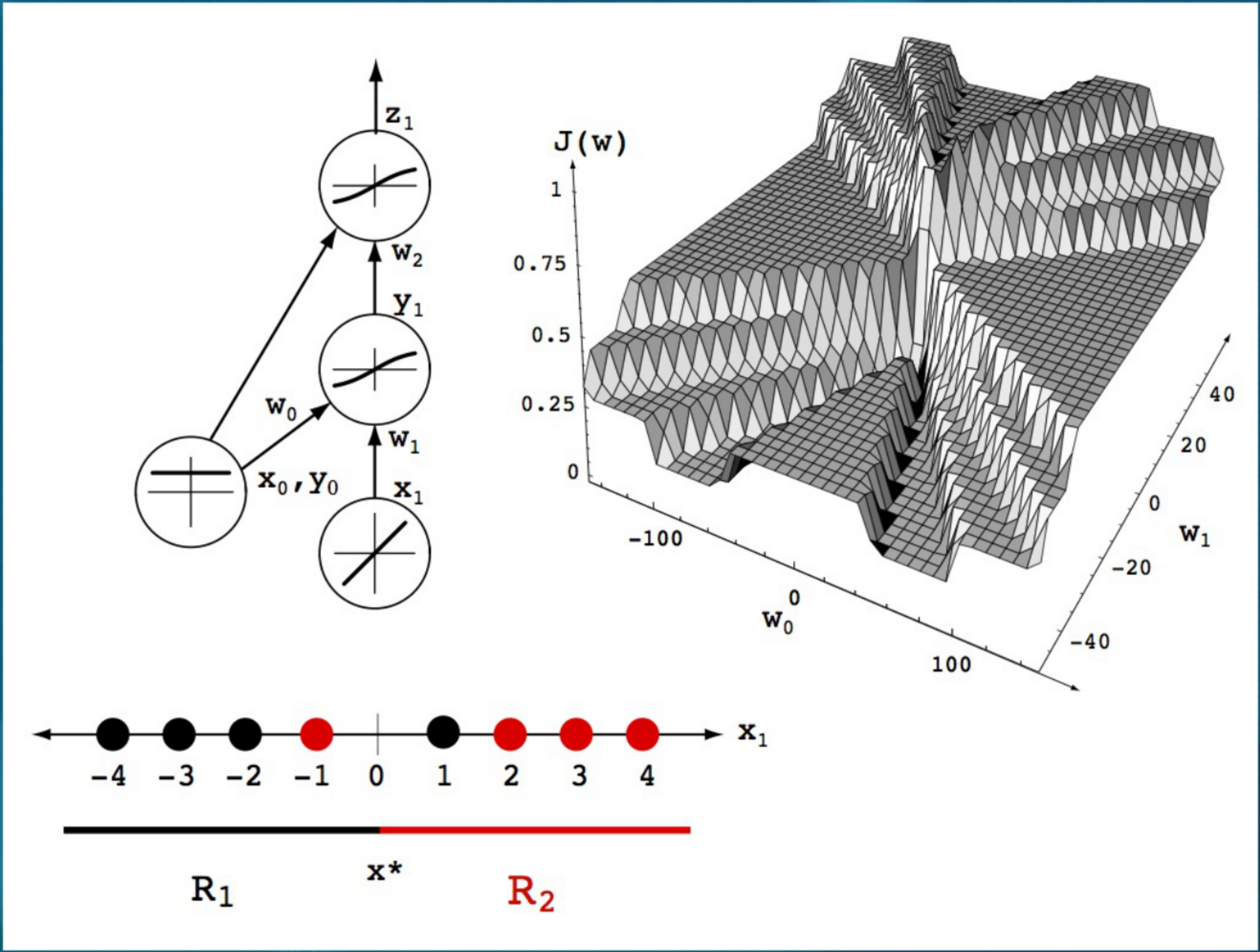
    3. Per ogni unità nascosta j

$$\delta_j \leftarrow o_j(1 - o_j) \sum_{k \in outputs} w_{k,j}\delta_k$$

    4. aggiorna tutti i pesi $w_{p,q}$ della rete

$$w_{s,q} \leftarrow w_{s,q} + \eta\Delta w_{s,q} \text{ dove } \Delta w_{s,q} = \begin{cases} \delta_s x_q & \text{se } s \in nascoste \\ \delta_s y_q & \text{se } s \in outputs \end{cases}$$

Esempio di funzione errore



Discesa di gradiente Batch e Stocastica

Batch:

Fai finché condizione di terminazione non soddisfatta

1. calcola $\nabla E_{Tr}[\vec{w}]$
2. $\vec{w} \leftarrow \vec{w} - \eta \nabla E_{Tr}[\vec{w}]$

Stocastica (Incrementale):

Fai finché condizione di terminazione non soddisfatta

- Per ogni esempio di apprendimento p in Tr
  1. calcola $\nabla E_{p \in Tr}[\vec{w}]$
  2. $\vec{w} \leftarrow \vec{w} - \eta \nabla E_{p \in Tr}[\vec{w}]$

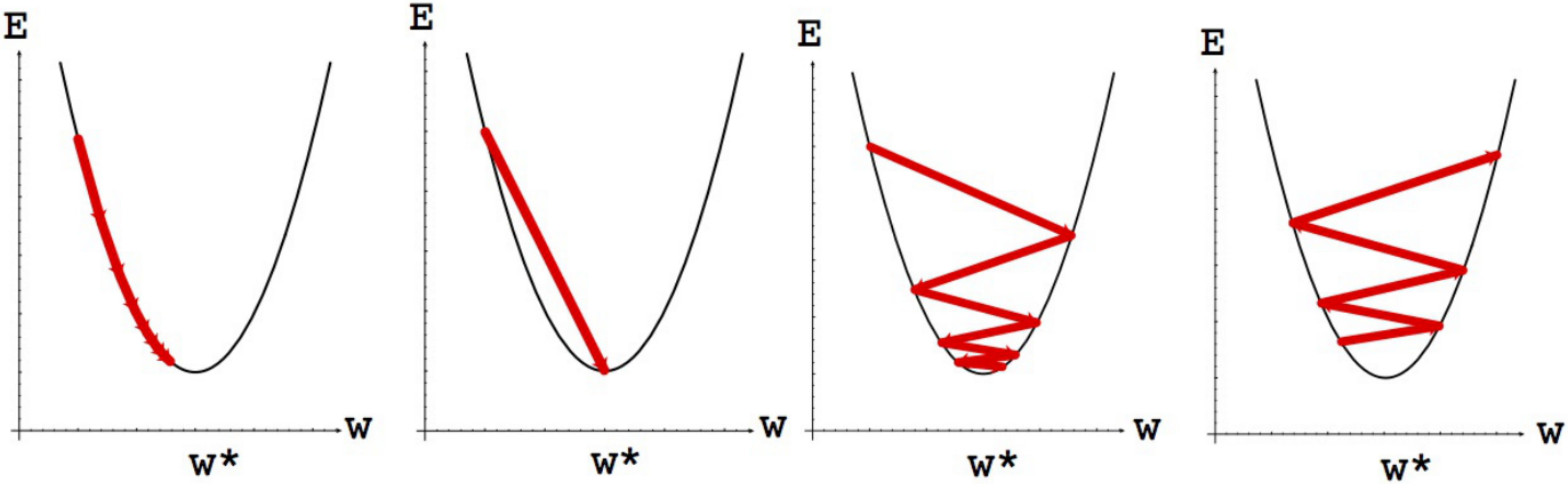
dove

$$E_{Tr}[\vec{w}] \equiv \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \qquad E_{p \in Tr}[\vec{w}] \equiv \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

La discesa di gradiente *Stocastica* (gradiente istantaneo) può approssimare quella *Batch* (gradiente esatto) con precisione arbitraria se η è sufficientemente piccolo

Alcuni Problemi ...

- Scelta della topologia della rete $\rightarrow$ determina lo Spazio delle Ipotesi;
- Scelta del passo di discesa (valore di η):



- apprendimento lento..., ma calcolo di output veloce
- $\boxed{\text{MINIMI LOCALI !!}}$

Bias Induttivo: sia nella rappresentazione che nella ricerca

Il seguente teorema stabilisce l'universalità di reti feed-forward come approssimatori di funzioni continue.

Teorema Sia $\varphi(\cdot)$ una funzione continua monotona crescente, limitata e noncostante. Si indichi con I_n l'ipercubo n-dimensionale $[0,1]^n$ e lo spazio delle funzioni continue su esso defi nite sia $C(I_n)$. Data una qualunque funzione $f \in C(I_n)$ e $\varepsilon > 0$, allora esiste un intero M e insiemi di costanti reali α_i, θ_i, e w_{ij}, dove $i = 1, \ldots, M$ e $j = 1, \ldots, n$ tale che $f(\cdot)$ possa essere approssimata da

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \varphi(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j - \theta_i) \tag{1}$$

in modo tale che

$$|F(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon \tag{2}$$

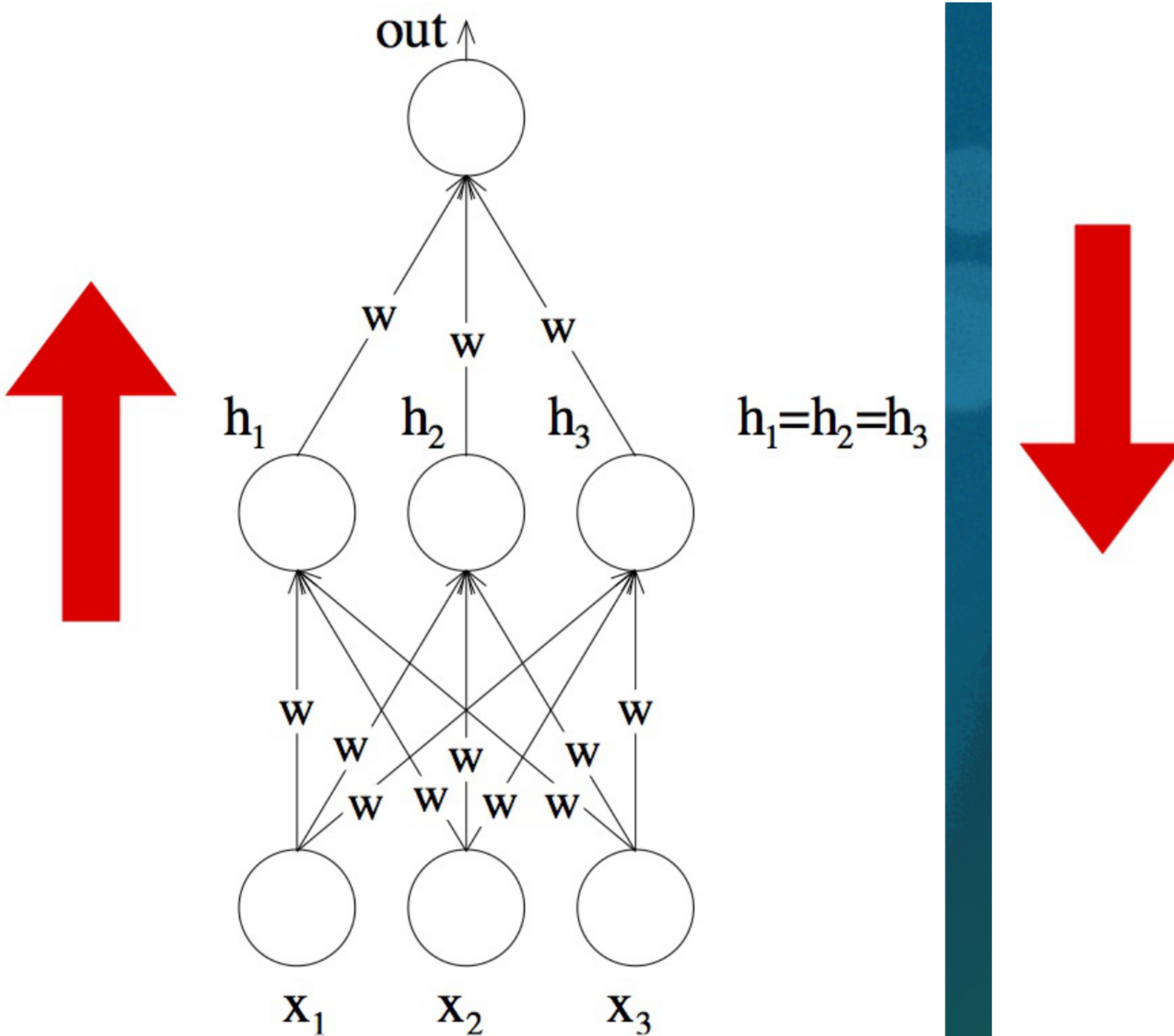
per tutti i punti $[x_1, \ldots, x_n] \in I_n$.

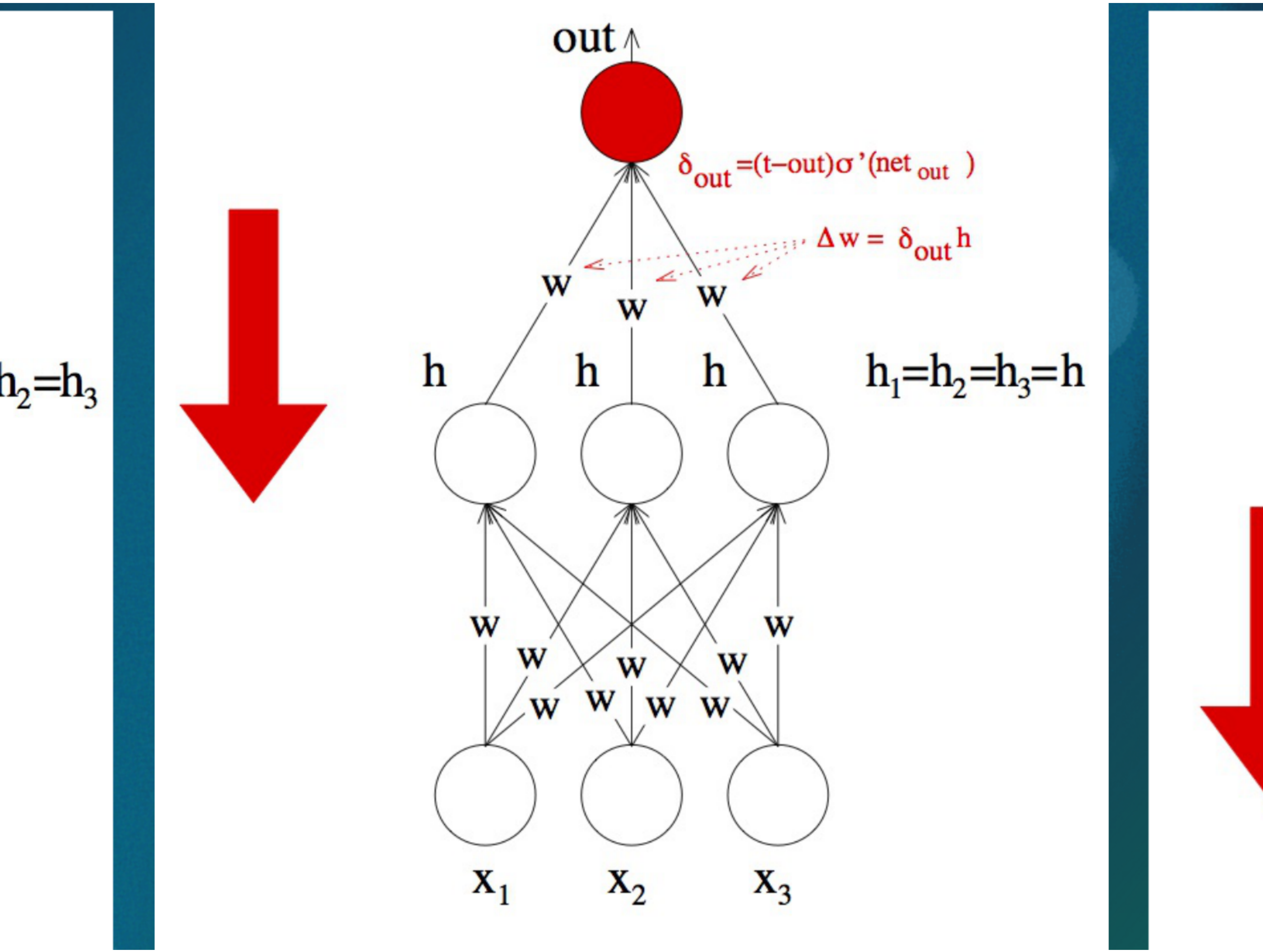
Notare che qualunque funzione sigmoidale soddisfa le condizioni imposte nel teorema su $\varphi(\cdot)$. Inoltre, l'equazione (1) rappresenta l'output di una rete multistrato descritta come segue

1. la rete ha n nodi di input ed un singolo strato di unità nascoste con M unità; gli input sono denotati da $x_1, \ldots, x_n$.
2. l'i-esima unità ha associati i pesi $w_{i1}, \ldots, w_{in}$ e soglia θ_i.
3. l'output della rete è una combinazione lineare degli output delle unità nascoste, dove i coeffi cienti della combinazione sono dati da $\alpha_1, \ldots, \alpha_M$.

Quindi, data una tolleranza ε, una rete con un unico strato nascosto può approssimare una qualsiasi funzione in $C(I_n)$.

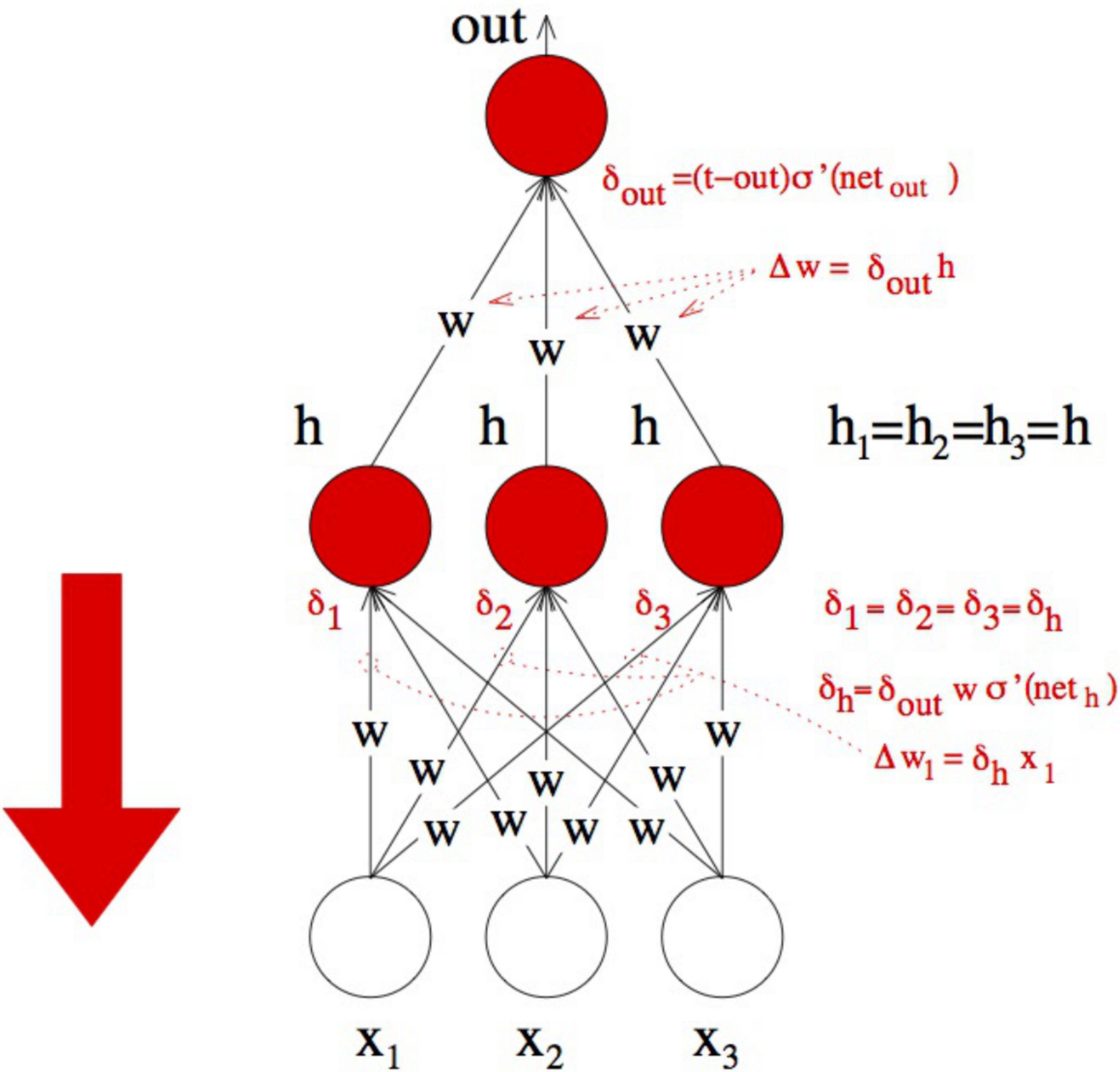
Si noti che il teorema afferma solo l'esistenza di una rete e non fornisce alcuna formula per il calcolo del numero M di unità nascoste necessarie per approssimare la funzione target con la tolleranza desiderata.


out
w
w
w
h1
h2
h3
h1=h2=h3
w
w
w
w
w
w
w
w
w
x1
x2
x3

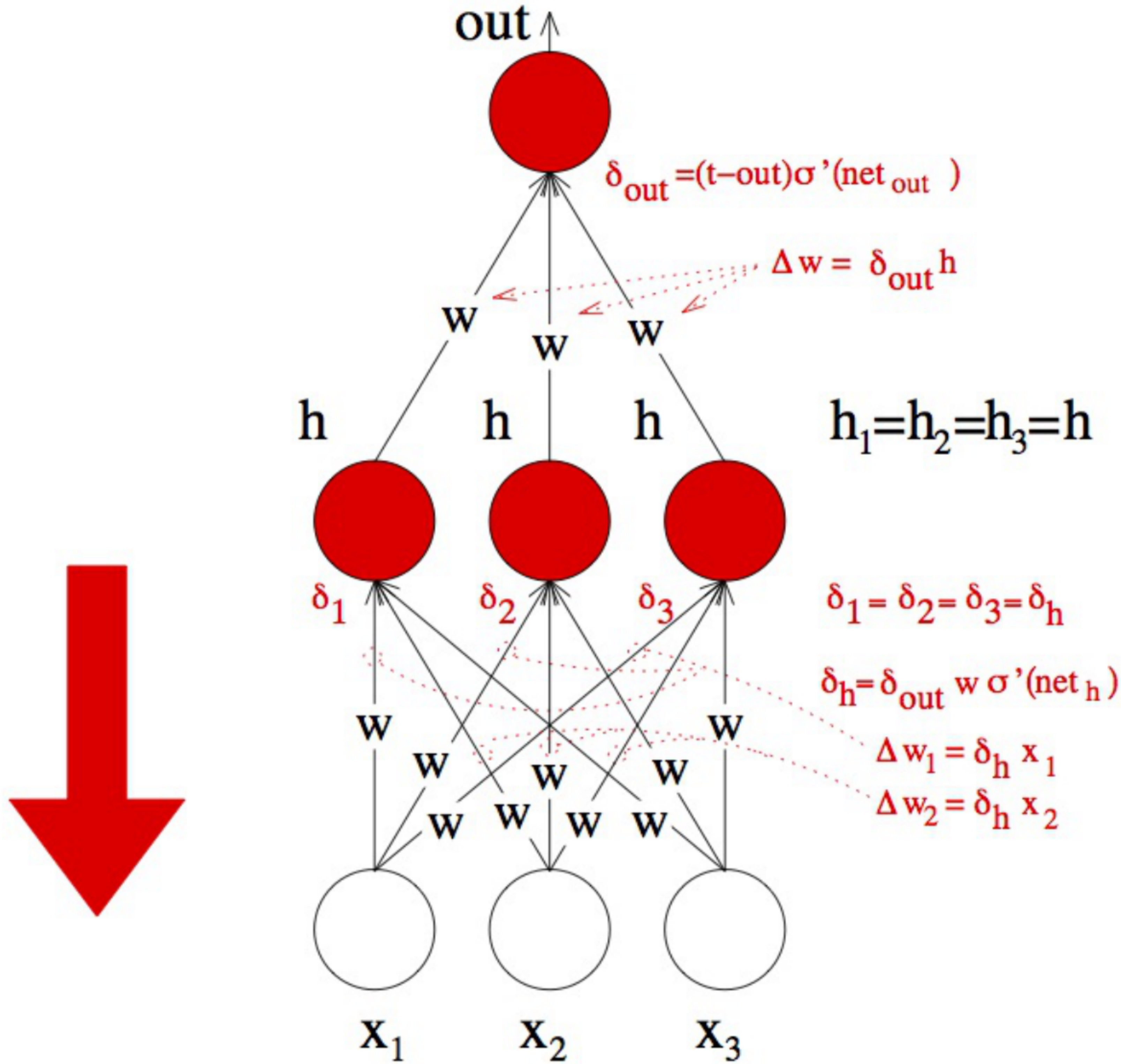


h2=h3
out
δout =(t−out)σ'(net out)
Δw = δout h
w
w
w
h
h
h
h1=h2=h3=h
w
w
w
w
w
w
w
w
w
x1
x2
x3

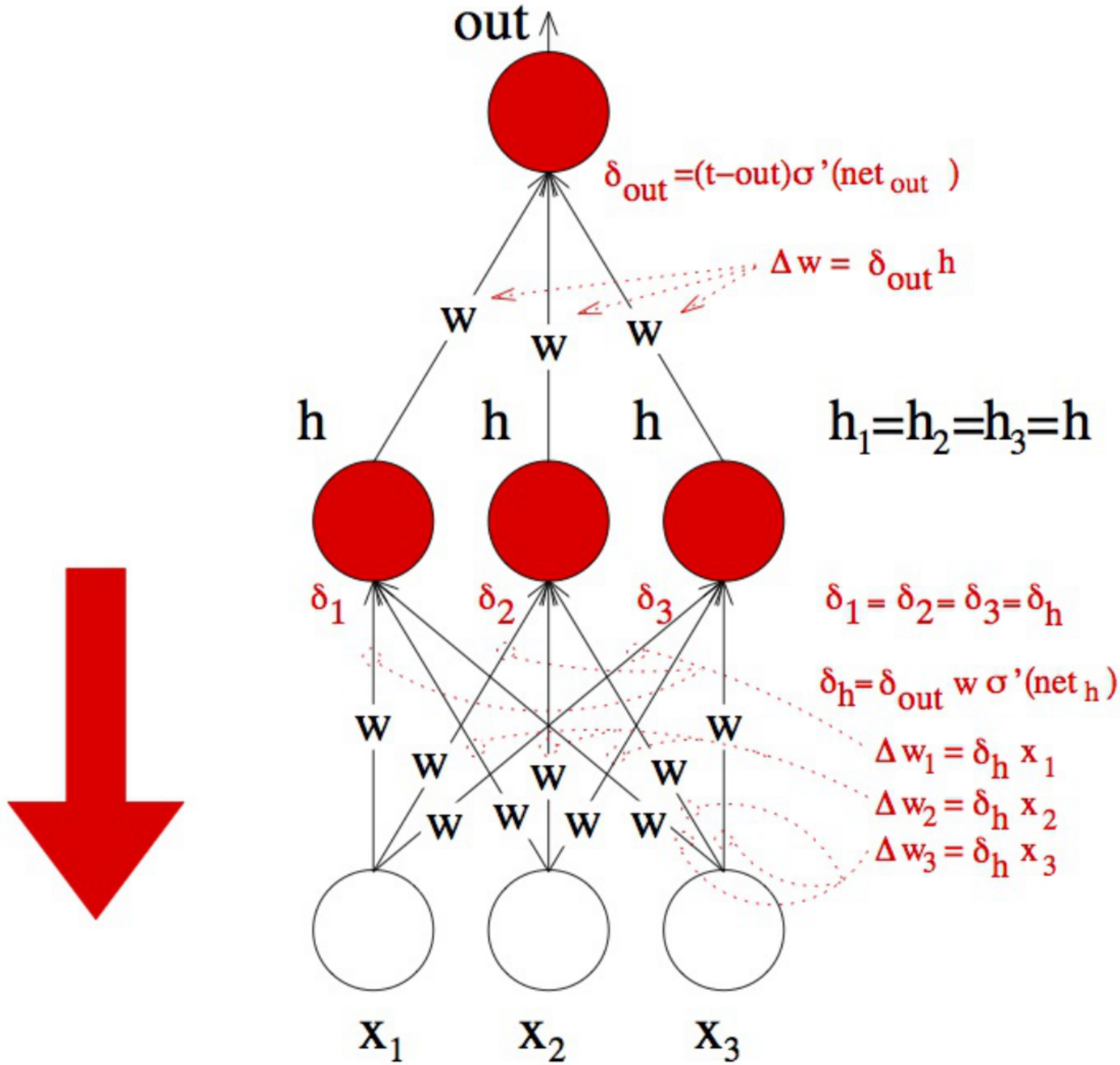
=h



out
δout =(t−out)σ'(net out)
Δw = δout h
w
w
w
h
h
h
h1=h2=h3=h
δ1
δ2
δ3
δ1 = δ2 = δ3 = δh
δh= δout w σ'(net h)
Δw1 = δh x1
w
w
w
w
w
w
w
w
w
x1
x2
x3



out
δout =(t−out)σ '(net out)
Δ w = δout h
w
w
w
h
h
h
h1=h2=h3=h
δ1
δ2
δ3
δ1 = δ2= δ3= δh
δh= δout w σ '(net h)
Δ w1 = δh x 1
Δ w2 = δh x 2
w
w
w
w
w
w
w
w
w
x1
x2
x3


out
$\delta_{out} = (t - out)\sigma'(net_{out})$
$\Delta w = \delta_{out} h$
w
w
w
h
h
h
$h_1 = h_2 = h_3 = h$
δ_1
δ_2
δ_3
$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_h$
$\delta_h = \delta_{out}\, w\, \sigma'(net_h)$
$\Delta w_1 = \delta_h\, x_1$
$\Delta w_2 = \delta_h\, x_2$
$\Delta w_3 = \delta_h\, x_3$
x_1
x_2
x_3