Criteri alternativi all'Entropia

Altri criteri suggeriti al posto dell'Entropia:

- **Variance Impurity** (per due classi)

$$p_- \cdot p_+$$

- **(Weighted) Gini Impurity** (generalizzazione di Variance Impurity a più di 2 classi)

$$\sum_{c,c' \in Classi, c \neq c'} \lambda_{c,c'} p_c \cdot p_{c'}$$

dove $\lambda_{c,c'}$ sono parametri di costo per classificazioni errate

- **Misclassification Impurity**

$$1 - \max_{c \in Classi} p_c$$

Reti Neurali in Generale

Le Reti Neurali Artificiali sono studiate sotto molti punti di vista. In particolare, contributi alla ricerca in questo campo provengono da:

- Biologia (Neurofisiologia)
- Informatica (Intelligenza Artificiale)
- Matematica (Ottimizzazione, Proprietà di approssimazione)
- Statistica (Regressione, Classificazione)
- Ingegneria (Pattern Classification, Teoria del Controllo)
- Economia (Studio di serie temporali)
- Fisica (Sistemi Dinamici)
- Psicologia (Apprendimento e Scienze Cognitive)

Reti Neurali in Generale

Bisogna distinguere due motivazioni diverse nello studiare Reti Neurali Artificiali:

1. riprodurre (e quindi comprendere) il cervello umano
   - modellare tutto o almeno parti del cervello umano in modo affidabile
   - riprodurre fedelmente fenomeni neurofisiologici
   - verificare sperimentalmente se il modello proposto riproduce i dati biologici
2. estrarre i principi fondamentali di calcolo utilizzati dal cervello
   - non importa riprodurre il cervello umano, ma solo evincere quali sono i principi fondamentali di calcolo che esso utilizza
   - semplificazioni ed astrazioni del carvello umano sono permesse, anzi, sono lo strumento principale di lavoro
   - produrre un sistema artificiale che sia eventualmente diverso dal cervello umano ma che riproduca alcune delle sue funzioni, magari in modo più veloce ed efficiente (metafora del volo: aereo “contro” uccello)

Reti Neurali in Generale

A noi interessa la seconda motivazione.

I modelli di Reti Neurali Artificiali proposti in questo ambito sono molteplici e con scopi diversi.
As esempio, esistono modelli per

- l'apprendimento supervisionato (Classificazione, Regressione, Serie Temporali, ...);
- l'apprendimento non supervisionato (Clustering, Data Mining, Self-Organization maps,...);
- realizzare Memorie Associative;
- ...

Tali modelli, in generale, differiscono per

- topologia della rete
- funzione calcolata dal singolo neurone
- algoritmo di apprendimento
- modalità di apprendimento (utilizzo dei dati di apprendimento)

Reti Neurali in Generale

Quando è opportuno utilizzare una Rete Neurale Artificiale ?

- l'input è ad alta dimensionalità (discreto e/o a valori reali)
- l'output è a valori discreti (classificazione) o a valori reali (regressione)
- l'output è costituito da un vettore di valori
- i dati possono contenere rumore
- la forma della funzione target è totalmente sconosciuta
- la soluzione finale non deve essere compresa da un esperto umano ("black-box problem")

Esempi di campi applicativi

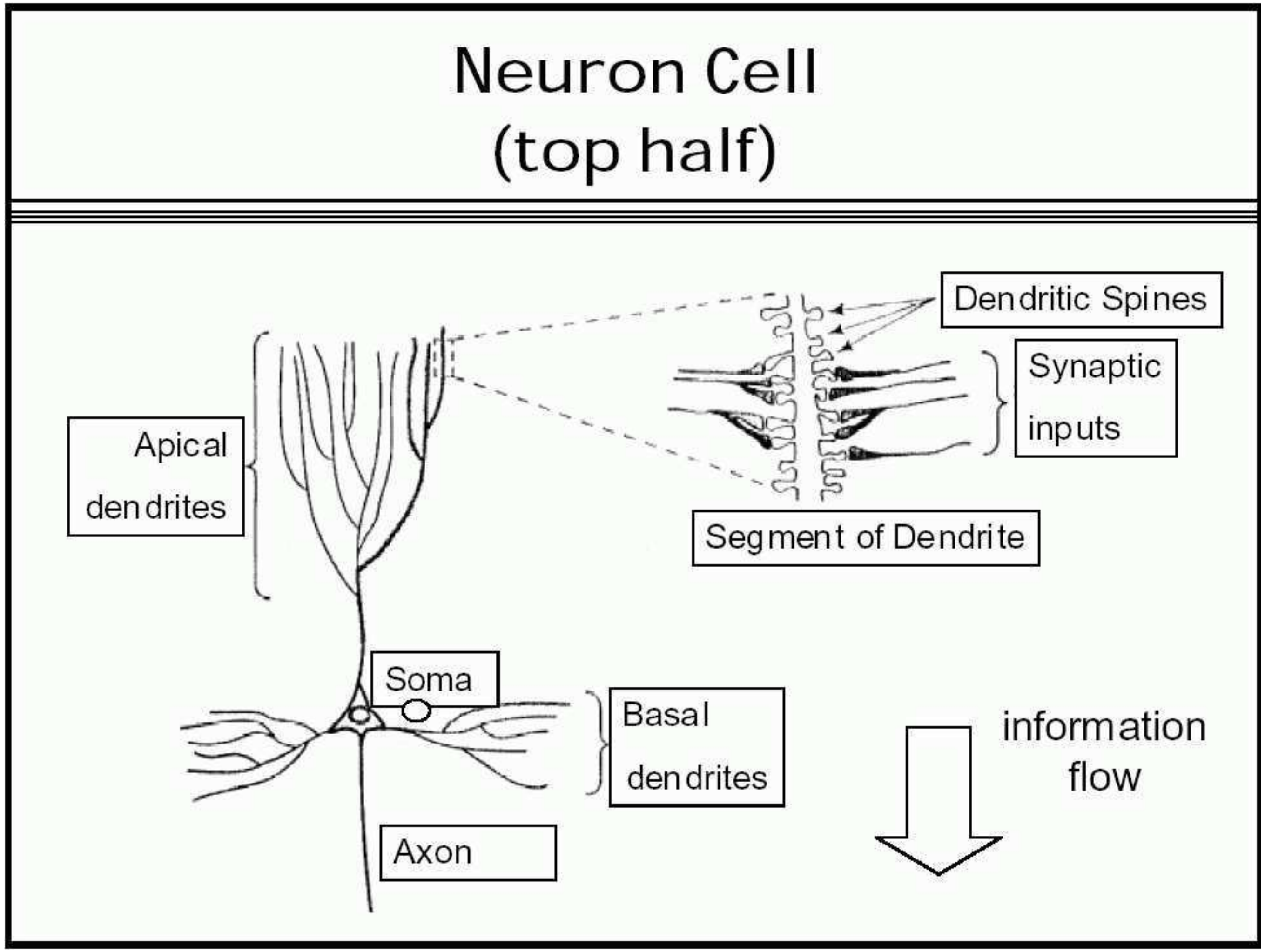
- riconoscimento del parlato
- classificazione di immagini
- predizione di serie temporali in finanza
- controllo di processi industriali

Reti Neurali Artificiali

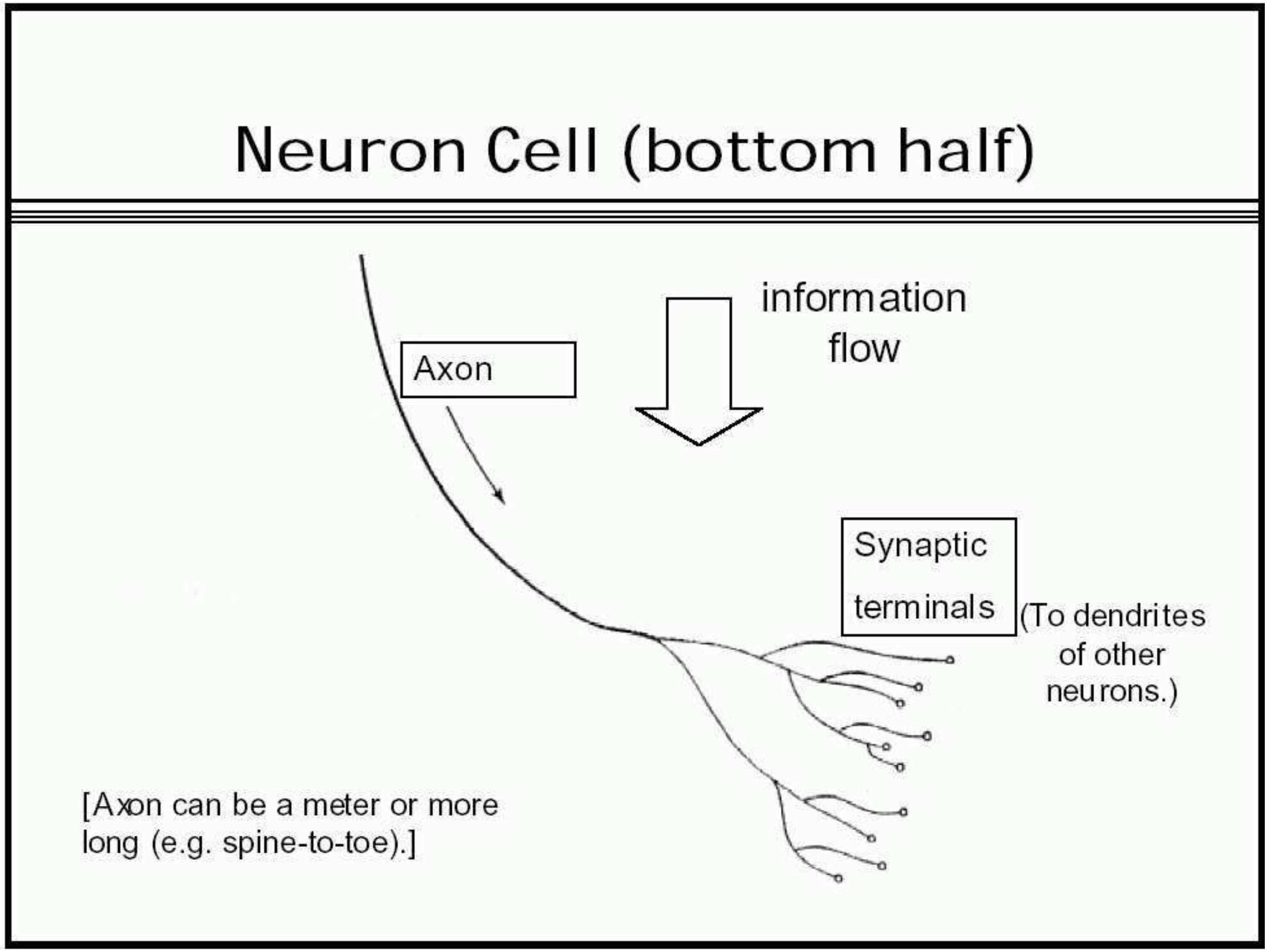
Le Reti Neurali Artificiali si ispirano al cervello umano:

- Il cervello umano è costituito da circa 10^{10} neuroni fortemente interconnessi fra loro;
- Ogni neurone possiede un numero di connessioni che va da circa 10^4 a circa 10^5;
- Il tempo di risposta di un neurone è circa 0.001 secondi;
- Considerando che per riconoscere il contenuto di una scena un umano impiega circa 0.1 secondi, ne consegue che il cervello umano sfrutta pesantemente il calcolo parallelo: infatti, in questo caso, non può effettuare più di 100 calcoli seriali [0.1/0.001=100].

Neurone Biologico


Neuron Cell
(top half)
Dendritic Spines
Synaptic inputs
Apical dendrites
Segment of Dendrite
Soma
Basal dendrites
information flow
Axon

Neurone Biologico

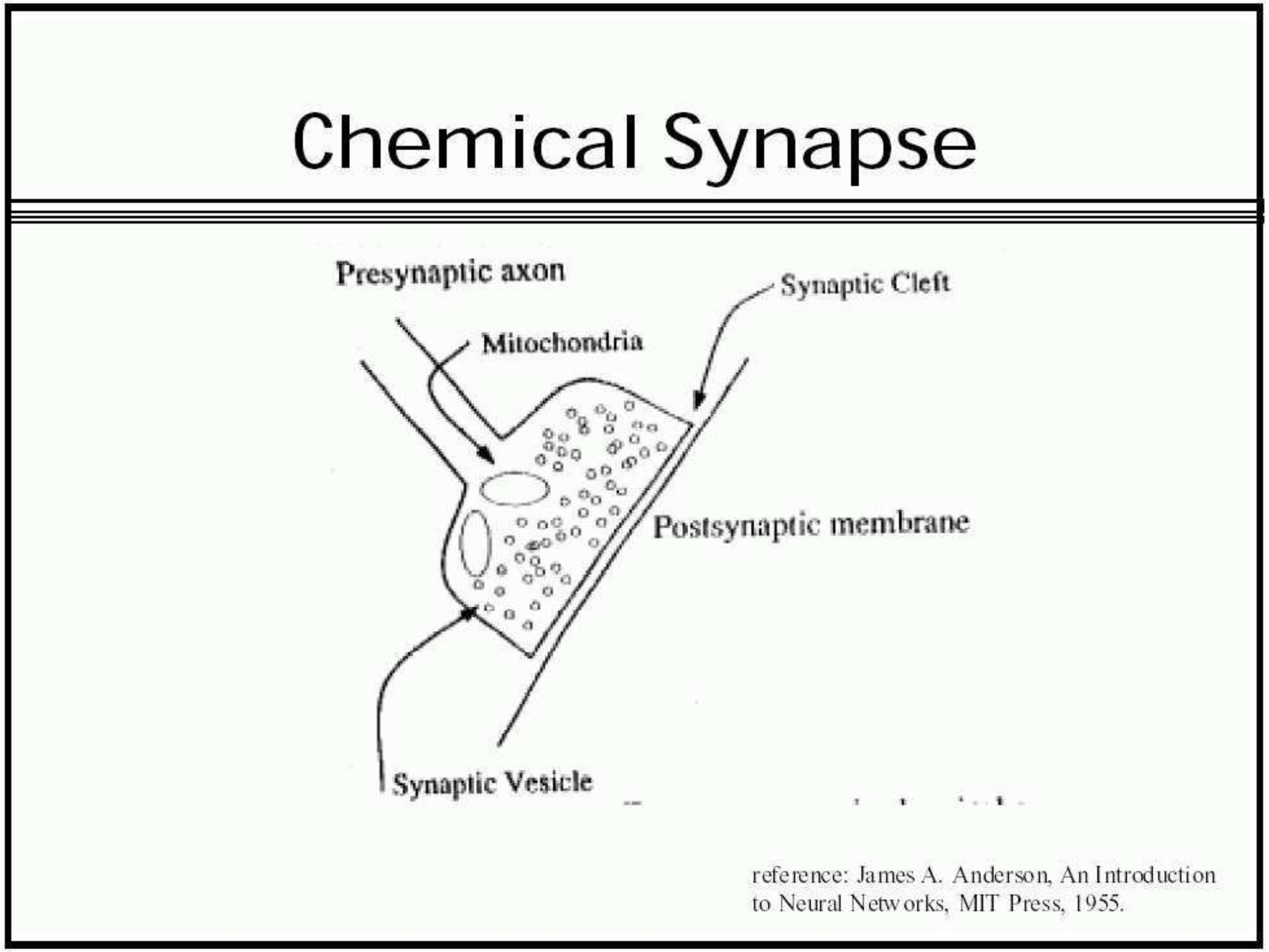


Neuron Cell (bottom half)

information flow
Axon
Synaptic terminals
(To dendrites of other neurons.)

[Axon can be a meter or more long (e.g. spine-to-toe).]

Neurone Biologico

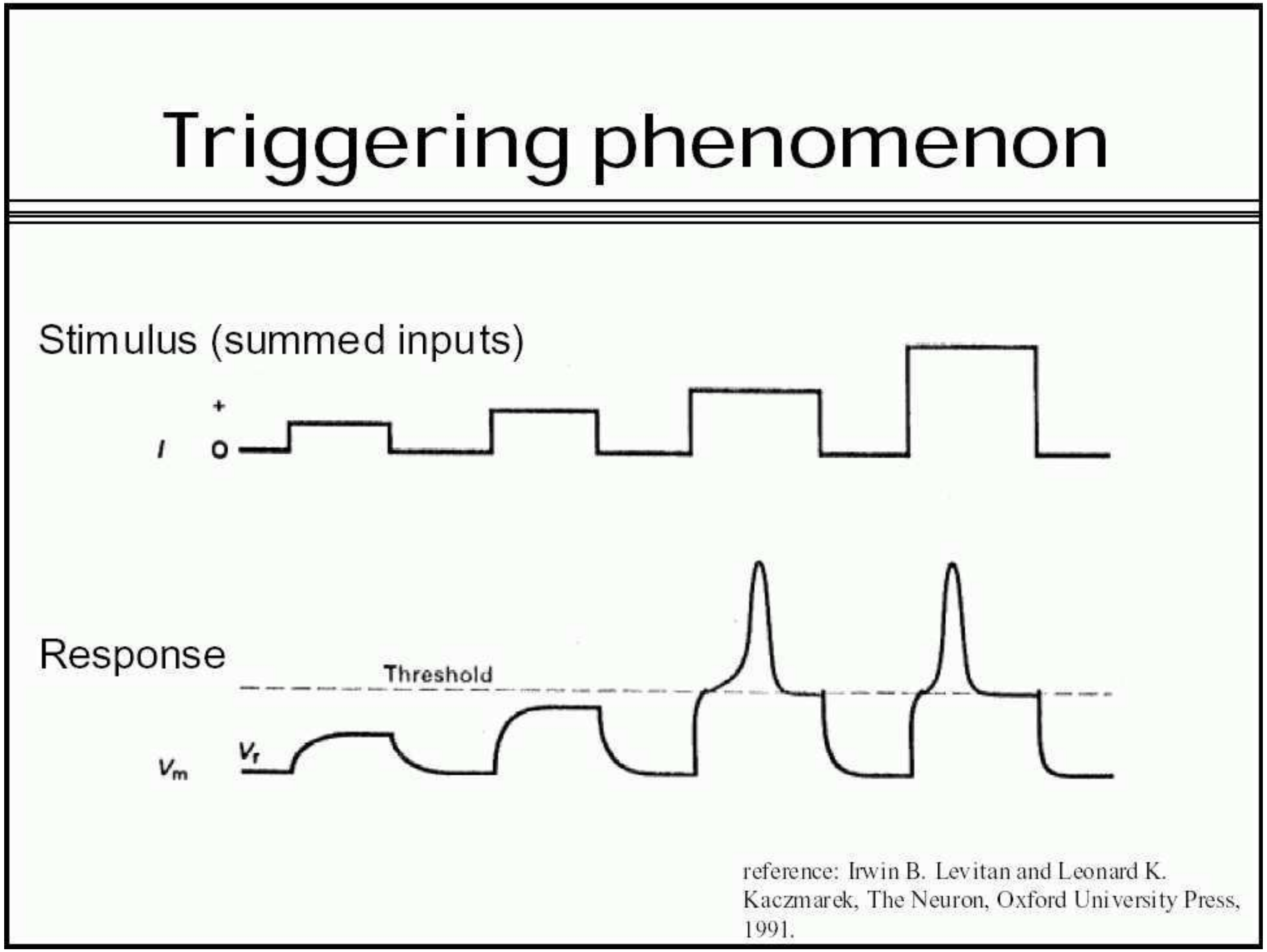


Chemical Synapse

Presynaptic axon
Synaptic Cleft
Mitochondria
Postsynaptic membrane
Synaptic Vesicle

reference: James A. Anderson, An Introduction to Neural Networks, MIT Press, 1955.

Neurone Biologico



Triggering phenomenon

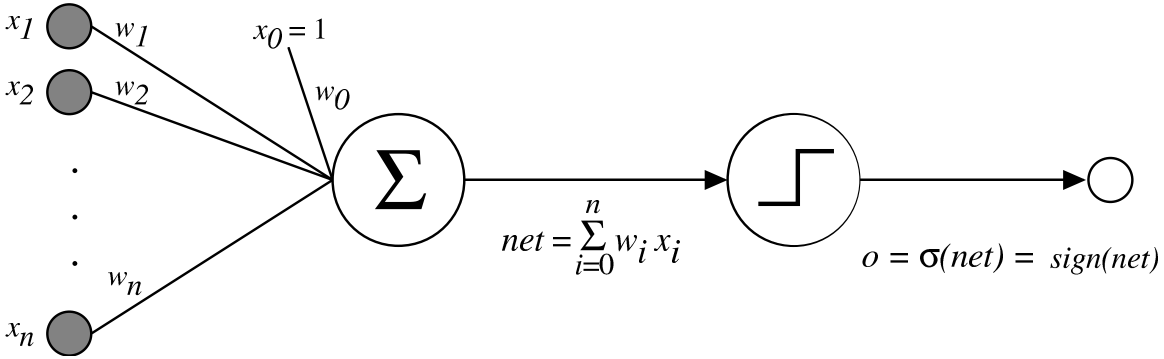
Stimulus (summed inputs)

Response

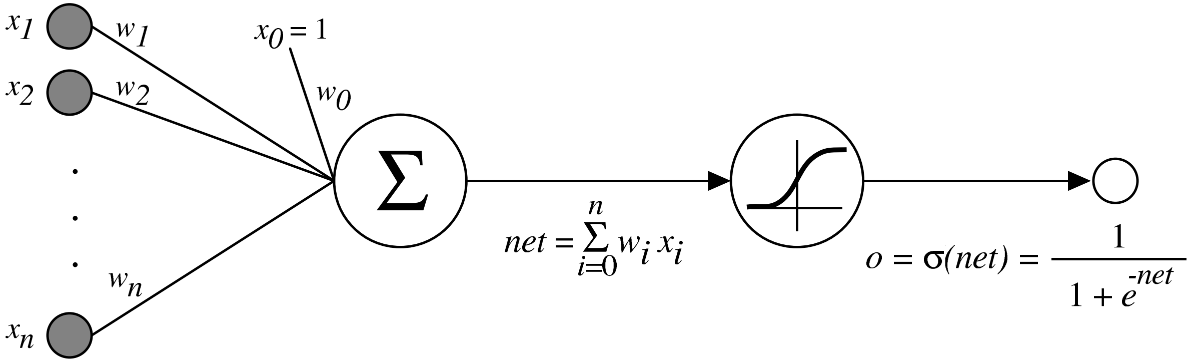
reference: Irwin B. Levitan and Leonard K. Kaczmarek, The Neuron, Oxford University Press, 1991.

Neurone Artificiale

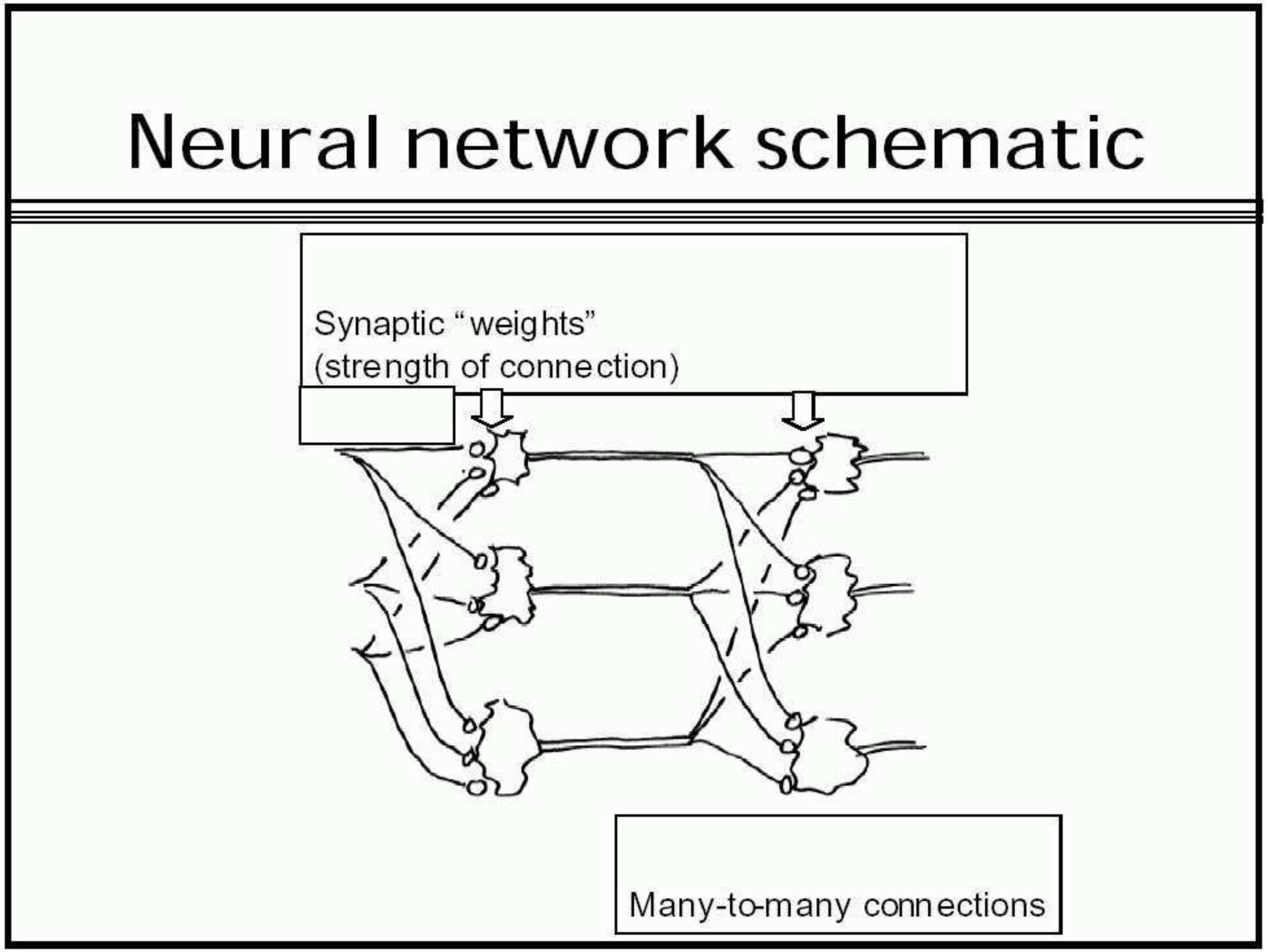
Alternativa 1: hard-threshold → iperpiano!!


x_1
x_2
x_n
w_1
w_2
w_n
$x_0 = 1$
w_0
Σ
$net = \sum_{i=0}^{n} w_i x_i$
$o = \sigma(net) = sign(net)$

Alternativa 2: neurone sigmoidale → funzione derivabile


x_1
x_2
x_n
w_1
w_2
w_n
$x_0 = 1$
w_0
Σ
$net = \sum_{i=0}^{n} w_i x_i$
$o = \sigma(net) = \frac{1}{1 + e^{-net}}$

Rete Neurale Biologica (schema)



Neural network schematic

Synaptic "weights"
(strength of connection)

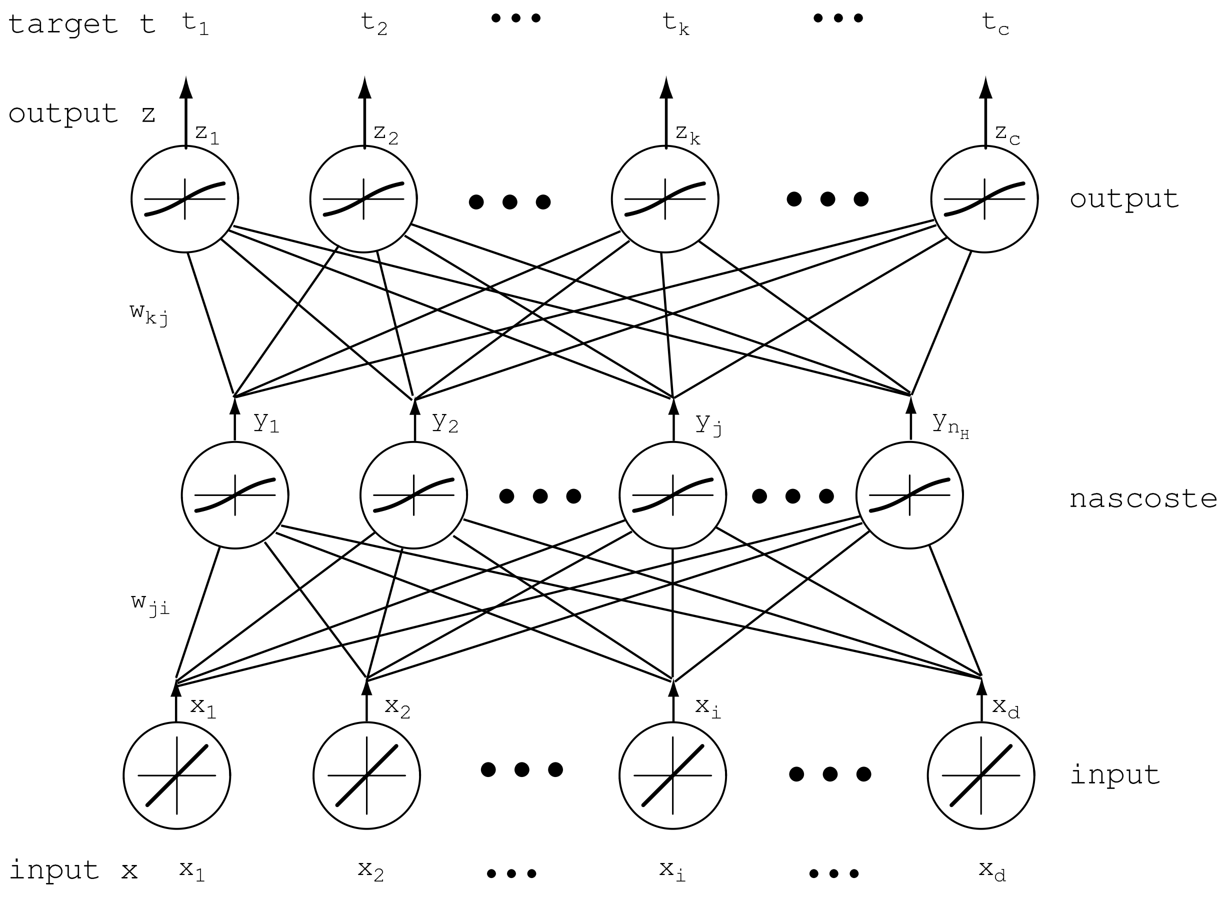
Many-to-many connections

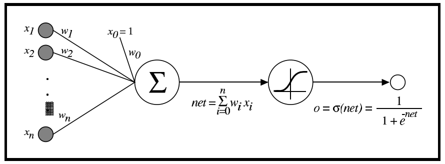
Reti Neurali Artificiali

Una Rete Neurale Artificiale è un sistema costituito da unità interconnesse che calcolano funzioni (numeriche) non-lineari:

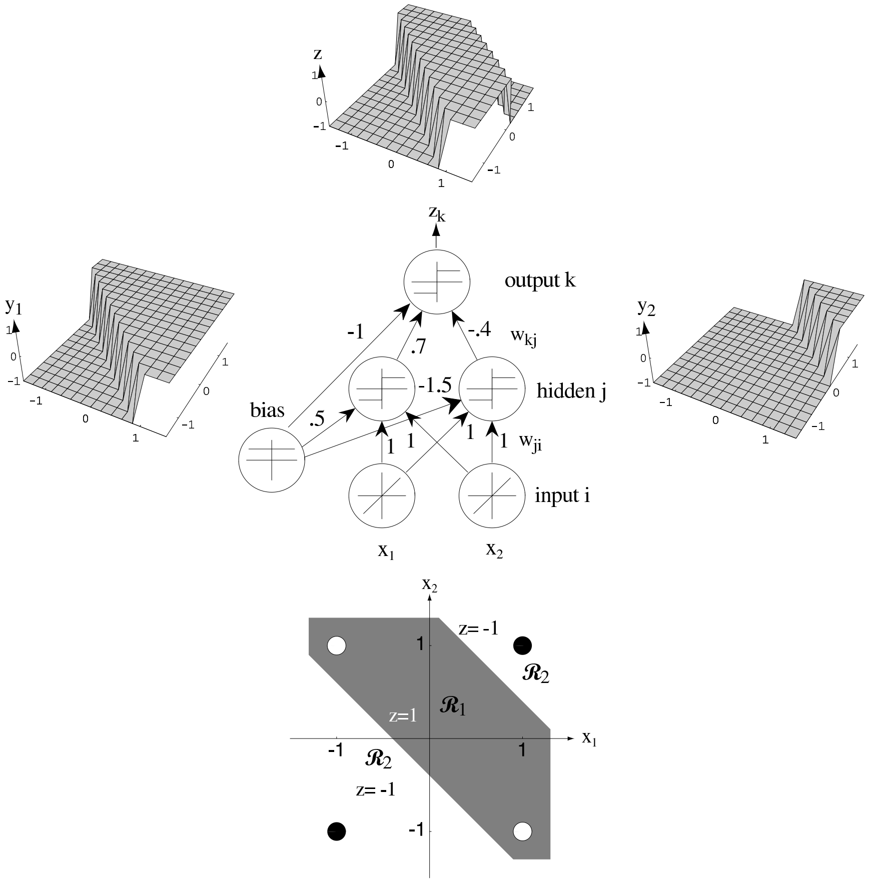
- le unità di *input* rappresentano le variabili di ingresso;
- le unità di *output* rappresentano le variabili di uscita;
- le unità di *nascoste* (se ve ne sono) rappresentano variabili interne che codificano (dopo l’apprendimento) le correlazioni tra le variabili di input relativamente al valore di output che si vuole generare.
- sulle connessioni fra unità sono definiti *pesi* adattabili (dall’algoritmo di apprendimento).

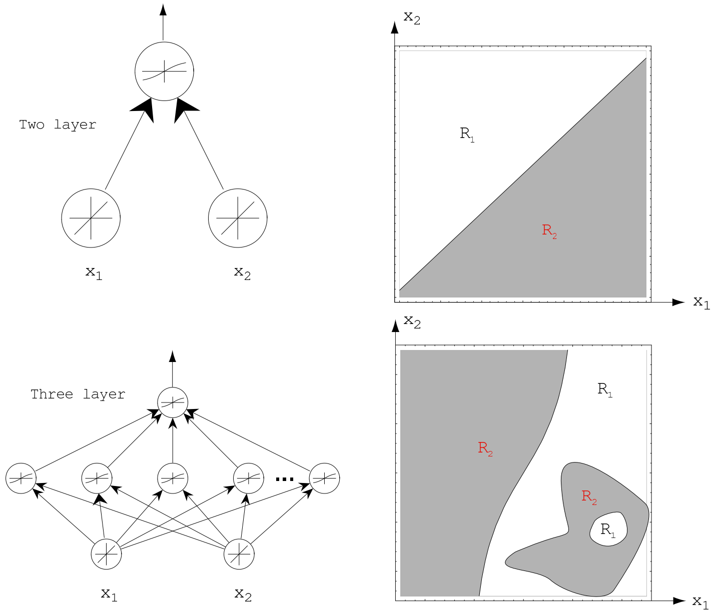
Reti Neurali Feed-forward (un solo livello nascosto)


target t
t1
t2
...
tk
...
tc
output z
z1
z2
zk
zc
output
wkj
y1
y2
yj
ynH
nascoste
wji
x1
x2
xi
xd
input
input x
x1
x2
...
xi
...
xd


x1
w1
x0 = 1
w0
x2
w2
xn
wn
Σ
net = Σ wi xi, i=0…n
o = σ(net) = 1 / (1 + e^-net)

Reti Neurali Feed-forward e Superfici di Decisione


z
y_1
y_2
z_k
output k
w_{kj}
hidden j
w_{ji}
input i
bias
-1
.7
-.4
-1.5
.5
1
1
1
1
x_1
x_2
z= -1
$\mathcal{R}_2$
$\mathcal{R}_1$
z=1
$\mathcal{R}_2$
z= -1


Two layer
Three layer
x_1
x_2
R_1
R_2

Singolo Neurone con Hard-Threshold

Singolo Neurone con Hard-Threshold: iperpiani!

$$\mathcal{H} = \{f_{(\vec{w},b)}(\vec{y}) | f_{(\vec{w},b)}(\vec{y}) = sign(\vec{w} \cdot \vec{y} + b), \vec{w}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}\}$$

che possiamo riscrivere come

$$\mathcal{H} = \{f_{(\vec{w}')}(\vec{y}') | f_{(\vec{w}')}(\vec{y}') = sign(\vec{w}' \cdot \vec{y}'), \vec{w}', \vec{y}' \in \mathbb{R}^{n+1}\}$$

se effettuiamo le segenti trasformazioni

$$\vec{w}' = [b, \vec{w}]^t \qquad \vec{y}' = [1, \vec{y}]^t$$

Faremo riferimento a tale neurone (e all’algoritmo di apprendimento associato) come Perceptron

Problemi: Quale è il potere computazionale di un Perceptron ?

Come definire un algoritmo di apprendimento ?

Funzioni Booleane

Consideriamo input binari e funzioni booleane.

Ogni funzione booleana può essere rappresentata tramite gli operatori or,and, not (in effetti, questo non è necessario se usiamo il nand o il nor)

Può un Perceptron implementare l'operatore or ?

Funzioni Booleane

Consideriamo input binari e funzioni booleane.

Ogni funzione booleana può essere rappresentata tramite gli operatori or,and, not (in effetti, questo non è necessario se usiamo il nand o il nor)

Può un Perceptron implementare l'operatore or ? Si !

Es. $\vec{y}' \in \{0,1\}^{n+1}, w_0' = -0.5, w_i' = 1, \ i = 1, \ldots, n$

Può un Perceptron implementare l'operatore and ?

Funzioni Booleane

Consideriamo input binari e funzioni booleane.

Ogni funzione booleana può essere rappresentata tramite gli operatori or,and, not (in effetti, questo non è necessario se usiamo il nand o il nor)

Può un Perceptron implementare l’operatore or ? Si !

Es. $\vec{y}' \in \{0,1\}^{n+1}, w_0' = -0.5, w_i' = 1,\ i = 1, \ldots, n$

Può un Perceptron implementare l’operatore and ? Si !

Es. $\vec{y}' \in \{0,1\}^{n+1}, w_0' = -n + 0.5, w_i' = 1,\ i = 1, \ldots, n$

Funzioni Booleane

Consideriamo input binari e funzioni booleane.

Ogni funzione booleana può essere rappresentata tramite gli operatori or,and, not (in effetti, questo non è necessario se usiamo il nand o il nor)

Può un Perceptron implementare l'operatore or ? Si !

Es. $\vec{y}' \in \{0,1\}^{n+1}, w_0' = -0.5, w_i' = 1,\ i = 1,\ldots,n$

Può un Perceptron implementare l'operatore and ? Si !

Es. $\vec{y}' \in \{0,1\}^{n+1}, w_0' = -n + 0.5, w_i' = 1,\ i = 1,\ldots,n$

L'operatore not si realizza banalmente con un Perceptron con una singola connessione (fare per esercizio).

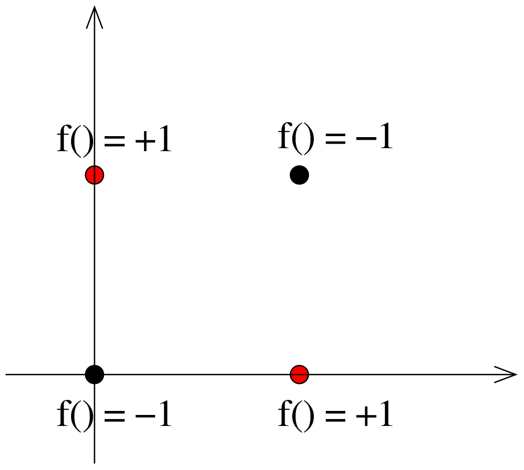
Esiste una funzione booleana semplice che non può essere realizzata da un Perceptron ?

(l'abbiamo già vista quando abbiamo calcolato la VC-dimension di $\mathcal{H}$!!)

Funzione non-linearmente separabili

XOR: funzione non linearmente separabile !

input	XOR
0 0	$false$
0 1	$true$
1 0	$true$
1 1	$false$



una funzione è linearmente separabile se esiste un iperpiano che separa gli ingressi positivi (+1) da quelli negativi (-1)

Apprendimento di funzioni linearmente separabili

Assumiamo di avere esempi di funzioni linearmente separabili.

Algoritmo di Apprendimento per il Perceptron

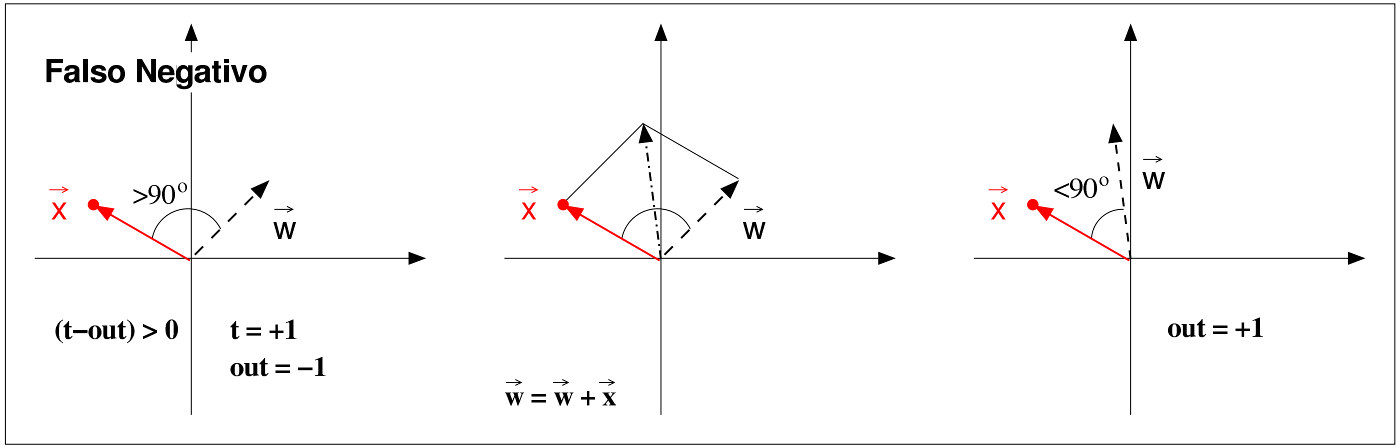
ingresso: insieme di apprendimento $Tr = \{(\vec{x}, t)\}$, dove $t \in \{-1, +1\}$

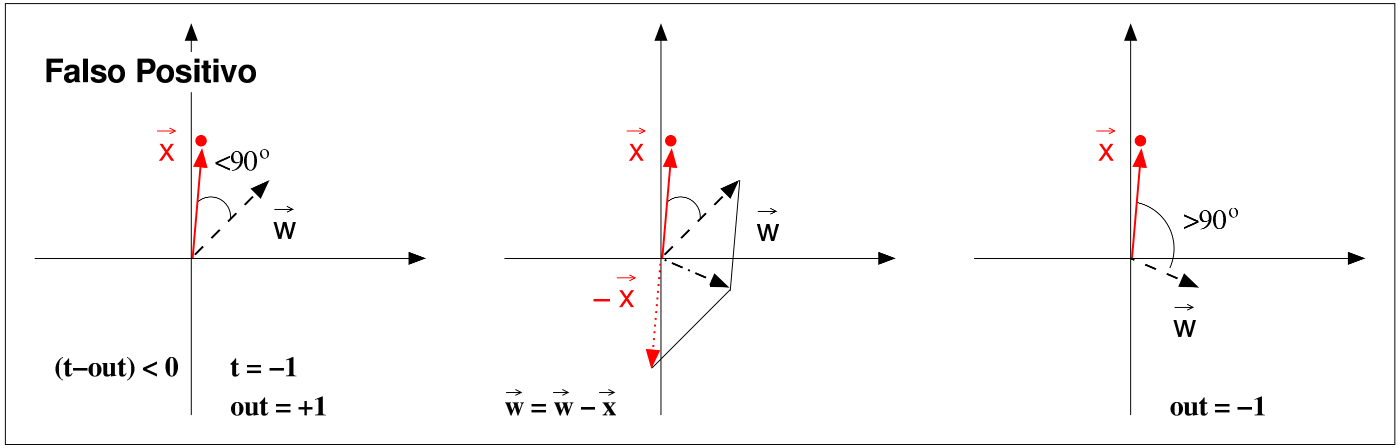
1. inizializza il vettore dei pesi $\vec{w}$ al vettore nullo (tutte le componenti a 0);
2. ripeti
   - (a) seleziona (a caso) uno degli esempi di apprendimento $(\vec{x}, t)$
   - (b) se $out = sign(\vec{w} \cdot \vec{x}) \neq t$ allora

$$\vec{w} \leftarrow \vec{w} + (t - out)\vec{x}$$

Apprendimento per Perceptron

Interpretazione geometrica


Falso Negativo
$\vec{x}$
$>90^o$
$\vec{w}$
$(t-out) > 0$
$t = +1$
$out = -1$
$\vec{x}$
$\vec{w}$
$\vec{w} = \vec{w} + \vec{x}$
$\vec{x}$
$<90^o$
$\vec{w}$
$out = +1$


Falso Positivo
$\vec{x}$
$<90^o$
$\vec{w}$
$(t-out) < 0$
$t = -1$
$out = +1$
$\vec{x}$
$\vec{w}$
$-\vec{x}$
$\vec{w} = \vec{w} - \vec{x}$
$\vec{x}$
$>90^o$
$\vec{w}$
$out = -1$

Apprendimento per Perceptron

Non necessariamente un singolo passo di apprendimento 2(b) riuscirà a modificare il segno dell'output: potrebbero servire molti passi.

Per rendere più stabile l'apprendimento si aggiunge un coefficiente di apprendimento η

$$\vec{w} \leftarrow \vec{w} + \eta(t - out)\vec{x}$$

con $\eta > 0$ e preferibilmente $\eta < 1$

Questo evita che il vettore dei pesi subisca variazioni troppo "violente" ogni volta che il passo 2(b) viene eseguito, e quindi cerca di evitare che esempi precedentemente ben classificati diventino classificati erroneamente a causa della forte variazione del vettore dei pesi.

Se l'insieme di apprendimento è LINEARMENTE SEPARABILE, si dimostra che l'algoritmo di apprendimento per il Perceptron termina con una soluzione in un numero finito di passi, altrimenti $\vec{w}$ CICLA in un insieme di vettori peso non necessariamente ottimali (cioè che commettono il minimo numero possibile di errori)

Apprendimento per Perceptron: esempio

Tr:

es.	$\vec{x}$	target
1	(4,5)	1
2	(6,1)	1
3	(4,1)	-1
4	(1,2)	-1

$\xrightarrow{\text{soglia}}$

es.	$\vec{x}'$	target
1’	(1,4,5)	1
2’	(1,6,1)	1
3’	(1,4,1)	-1
4’	(1,1,2)	-1

vettore dei pesi: $\vec{w} = (w_0, w_1, w_2)$

supponiamo di partire con pesi “random”: $\vec{w} = (0, 1, -1)$ e $\eta = \frac{1}{2}$

pesi	input	target	out	errore	nuovi pesi
(0,1,-1)	(1,4,5)	1			
	(1,6,1)	1			
	(1,4,1)	-1			
	(1,1,2)	-1			

Apprendimento per Perceptron: esempio

pesi $\vec{w}$	input $\vec{x}'$	target t	out out	errore $(t - out)$	nuovi pesi $\vec{w} \leftarrow \vec{w} + \frac{1}{2}(t - out)\vec{x}'$
(0,1,-1)	(1,4,5)	1	-1	2	(1,5,4)
(1,5,4)	(1,6,1)	1	1	0	nessun cambiamento
(1,5,4)	(1,4,1)	-1	1	-2	(0,1,3)
(0,1,3)	(1,1,2)	-1	1	-2	(-1,0,1)

Apprendimento per Perceptron: esempio

pesi $\vec{w}$	input $\vec{x}'$	target t	out out	errore $(t - out)$	nuovi pesi $\vec{w} \leftarrow \vec{w} + \frac{1}{2}(t - out)\vec{x}'$
(-1,0,1)	(1,4,5)	1	1	0	nessun cambiamento
(-1,0,1)	(1,6,1)	1	? (-1)	2	(0,6,2)
(0,6,2)	(1,4,1)	-1	1	-2	(-1,2,1)
(-1,2,1)	(1,1,2)	-1	1	-2	(-2,1,-1)

Apprendimento per Perceptron: esempio

pesi $\vec{w}$	input $\vec{x}'$	target t	out out	errore $(t - out)$	nuovi pesi $\vec{w} \leftarrow \vec{w} + \frac{1}{2}(t - out)\vec{x}'$
(-2,1,-1)	(1,4,5)	1	-1	2	(-1,5,4)
(-1,5,4)	(1,6,1)	1	1	0	nessun cambiamento
(-1,5,4)	(1,4,1)	-1	1	-2	(-2,1,3)
(-2,1,3)	(1,1,2)	-1	1	-2	(-3,0,1)

Apprendimento per Perceptron: esempio

pesi $\vec{w}$	input $\vec{x}'$	target t	out out	errore $(t - out)$	nuovi pesi $\vec{w} \leftarrow \vec{w} + \frac{1}{2}(t - out)\vec{x}'$
(-3,0,1)	(1,4,5)	1	1	0	nessun cambiamento
(-3,0,1)	(1,6,1)	1	-1	2	(-2,6,2)
(-2,6,2)	(1,4,1)	-1	1	-2	(-3,2,1)
(-3,2,1)	(1,1,2)	-1	1	-2	(-4,1,-1)

Apprendimento per Perceptron: esempio

pesi $\vec{w}$	input $\vec{x}'$	target t	out out	errore $(t - out)$	nuovi pesi $\vec{w} \leftarrow \vec{w} + \frac{1}{2}(t - out)\vec{x}'$
(-4,1,-1)	(1,4,5)	1	-1	2	(-3,5,4)
(-3,5,4)	(1,6,1)	1	1	0	nessun cambiamento
(-3,5,4)	(1,4,1)	-1	1	-2	(-4,1,3)
(-4,1,3)	(1,1,2)	-1	1	-2	(-5,0,1)

Apprendimento per Perceptron: esempio

pesi $\vec{w}$	input $\vec{x}'$	target t	out out	errore $(t - out)$	nuovi pesi $\vec{w} \leftarrow \vec{w} + \frac{1}{2}(t - out)\vec{x}'$
(-5,0,1)	(1,4,5)	1	? (-1)	2	(-4,4,6)
(-4,4,6)	(1,6,1)	1	1	0	nessun cambiamento
(-4,4,6)	(1,4,1)	-1	1	-2	(-5,0,5)
(-5,0,5)	(1,1,2)	-1	1	-2	(-6,-1,3)

Apprendimento per Perceptron: esempio

pesi $\vec{w}$	input $\vec{x}'$	target t	out out	errore $(t - out)$	nuovi pesi $\vec{w} \leftarrow \vec{w} + \frac{1}{2}(t - out)\vec{x}'$
(-6,-1,3)	(1,4,5)	1	1	0	nessun cambiamento
(-6,-1,3)	(1,6,1)	1	-1	2	(-5,5,4)
(-5,5,4)	(1,4,1)	-1	1	-2	(-6,1,3)
(-6,1,3)	(1,1,2)	-1	1	-2	(-7,0,1)

Apprendimento per Perceptron: esempio

pesi $\vec{w}$	input $\vec{x}'$	target t	out out	errore $(t - out)$	nuovi pesi $\vec{w} \leftarrow \vec{w} + \frac{1}{2}(t - out)\vec{x}'$
(-7,0,1)	(1,4,5)	1	-1	2	(-6,4,6)
(-6,4,6)	(1,6,1)	1	1	0	nessun cambiamento
(-6,4,6)	(1,4,1)	-1	1	-2	(-7,0,5)
(-7,0,5)	(1,1,2)	-1	1	-2	(-8,-1,3)

Apprendimento per Perceptron: esempio

pesi $\vec{w}$	input $\vec{x}'$	target t	out out	errore $(t - out)$	nuovi pesi $\vec{w} \leftarrow \vec{w} + \frac{1}{2}(t - out)\vec{x}'$
(-8,-1,3)	(1,4,5)	1	1	0	nessun cambiamento
(-8,-1,3)	(1,6,1)	1	-1	2	(-7,5,2)
(-7,5,2)	(1,4,1)	-1	1	-2	(-8,1,3)
(-8,1,3)	(1,1,2)	-1	-1	0	nessun cambiamento

Apprendimento per Perceptron: esempio

pesi $\vec{w}$	input $\vec{x}'$	target t	out out	errore $(t - out)$	nuovi pesi $\vec{w} \leftarrow \vec{w} + \frac{1}{2}(t - out)\vec{x}'$
(-8,1,3)	(1,4,5)	1	1	0	nessun cambiamento
(-8,1,3)	(1,6,1)	1	1	0	nessun cambiamento
(-8,1,3)	(1,4,1)	-1	-1	0	nessun cambiamento
(-8,1,3)	(1,1,2)	-1	-1	0	nessun cambiamento

Apprendimento di Reti di Perceptron

Abbiamo visto che un singolo Perceptron non riesce ad apprendere tutte le funzioni booleane (es. XOR)

Però una rete di Perceptron può implementare una qualunque funzione booleana (tramite AND, OR, NOT).

Problema: come effettuare l’apprendimento di una rete di Perceptron ?

Non si sa come assegnare “credito” o “colpe” alle unità nascoste:

PROBLEMA DELL’ASSEGNAMENTO DEL CREDITO

Una possibile soluzione è quella di rendere il singolo neurone derivabile e sfruttare la tecnica di Discesa del Gradiente per apprendere i pesi “giusti”.

Vediamo, quindi, come la Discesa del Gradiente si applica ad un Perceptron “semplificato”.

Discesa di Gradiente

Consideriamo un Perceptron SENZA la hard-threshold:

$$out(\vec{x}) = \sum_{i=0}^{n} w_i x_i = \vec{w} \cdot \vec{x}$$

e definiamo una misura dell'errore commesso da un particolare vettore dei pesi:

Funzione Errore: $E[\vec{w}] = \dfrac{1}{2N_{Tr}} \sum_{(\vec{x}^{(i)},t^{(i)}) \in Tr} \left(t^{(i)} - out(\vec{x}^{(i)}) \right)^2$

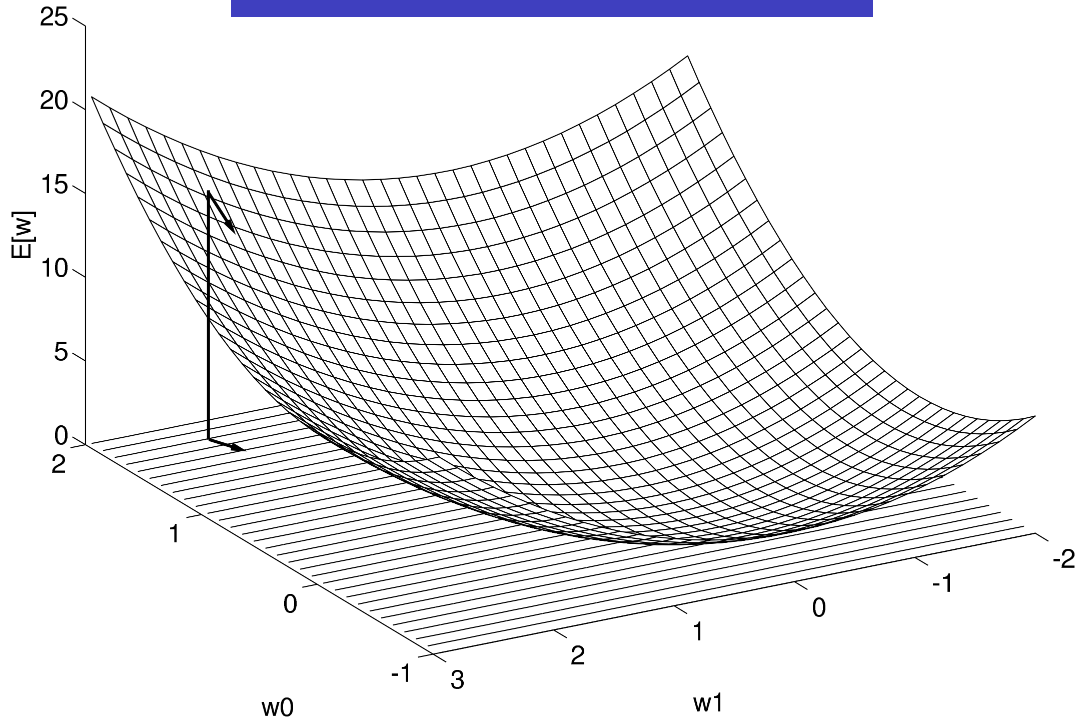
dove N_{Tr} è la cardinalità dell'insieme di apprendimento Tr.

La funzione errore di sopra misura lo scarto quadratico medio (diviso 2) del valore target da quello predetto dal neurone (out).

Ovviamente, se $\forall (\vec{x}^{(i)}, t^{(i)}) \in Tr$ si ha $out(\vec{x}^{(i)}) = t^{(i)} \rightarrow \ E[\vec{w}] = 0$

Quindi bisogna MINIMIZZARE $E[\vec{w}]$ rispetto a $\vec{w}$

Discesa di Gradiente



Idea base: partire da un $\vec{w}$ random e modificarlo nella direzione contraria al gradiente (che indica la direzione di crescita di $E[\vec{w}]$)

$$\underbrace{\nabla E[\vec{w}]}_{\text{gradiente}} \equiv \left[\frac{\partial E}{\partial w_0}, \frac{\partial E}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial E}{\partial w_n}\right], \qquad \Delta\vec{w} = -\eta \nabla E[\vec{w}], \qquad \Delta w_i = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_i}$$

Calcolo del gradiente

$$\frac{\partial E}{\partial w_i} = \frac{\partial}{\partial w_i} \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} (t^{(d)} - out^{(d)})^2$$

Calcolo del gradiente

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{\partial}{\partial w_i} \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} (t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - out^{(d)})^2
\end{aligned}
$$

Calcolo del gradiente

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{\partial}{\partial w_i} \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} (t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} 2(t^{(d)} - out^{(d)}) \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - out^{(d)})
\end{aligned}
$$

Calcolo del gradiente

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{\partial}{\partial w_i} \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} (t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} 2(t^{(d)} - out^{(d)}) \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - out^{(d)}) \\
&= \frac{1}{N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} (t^{(d)} - out^{(d)}) \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - \vec{w} \cdot \vec{x}^{(d)})
\end{aligned}
$$

Calcolo del gradiente

$$\frac{\partial E}{\partial w_i} = \frac{\partial}{\partial w_i}\frac{1}{2N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}(t^{(d)} - out^{(d)})^2$$

$$= \frac{1}{2N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}\frac{\partial}{\partial w_i}(t^{(d)} - out^{(d)})^2$$

$$= \frac{1}{2N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}2(t^{(d)} - out^{(d)})\frac{\partial}{\partial w_i}(t^{(d)} - out^{(d)})$$

$$= \frac{1}{N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}(t^{(d)} - out^{(d)})\frac{\partial}{\partial w_i}(t^{(d)} - \vec{w}\cdot\vec{x}^{(d)})$$

$$\frac{\partial E}{\partial w_i} = \frac{1}{N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}(t^{(d)} - out^{(d)})(-x_i^{(d)})$$

$$= -\frac{1}{N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}(t^{(d)} - out^{(d)})(x_i^{(d)})$$

Discesa di Gradiente

Gradient-Descent(Tr, η)

ogni esempio di apprendimento è una coppia $(\vec{x}, t)$*, dove* $\vec{x}$ *è il vettore di valori in input, e* t *è il valore desiderato in output (target).* η *è il coefficiente di apprendimento (che ingloba* $\frac{1}{N_{Tr}}$*).*

```
• Assegna a $w_i$ valori piccoli random
• Finché la condizione di terminazione non è verificata, fai
  – $\Delta w_i \leftarrow 0$
  – Per ogni $(\vec{x}, t)$ in $Tr$, fai
    ∗ Presenta $\vec{x}$ al neurone e calcola l'output $out$
    ∗ Per ogni $w_i$, fai
          $\Delta w_i \leftarrow \Delta w_i + \eta(t - out)x_i$
  – Per ogni $w_i$, fai
          $w_i \leftarrow w_i + \Delta w_i$
```

Discesa di Gradiente con Sigmoide

Consideriamo un Perceptron con funzione sigmoidale:

$$out(\vec{x}) = \sigma(\sum_{i=0}^{n} w_i x_i) = \sigma(\vec{w} \cdot \vec{x})$$

dove si ricorda che $\sigma(net) = \frac{1}{1+e^{-net}}$

Si noti che per $\sigma()$ vale la seguente relazione

$$\sigma'(net) = \frac{d\,\sigma(net)}{d\,net} = \sigma(net)(1 - \sigma(net))$$

e ricordiamo che (derivata di funzioni composte)

$$\frac{d\,f(g(x))}{d\,x} = \frac{d\,f(g(x))}{d\,g(x)}\,\frac{d\,g(x)}{d\,x}$$

Calcolo del gradiente con sigmoide

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{\partial}{\partial w_i} \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} (t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} 2(t^{(d)} - out^{(d)}) \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - out^{(d)})
\end{aligned}
$$

Calcolo del gradiente con sigmoide

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{\partial}{\partial w_i}\frac{1}{2N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}(t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}\frac{\partial}{\partial w_i}(t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}2(t^{(d)} - out^{(d)})\frac{\partial}{\partial w_i}(t^{(d)} - out^{(d)}) \\
&= \frac{1}{N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}(t^{(d)} - out^{(d)})\frac{\partial}{\partial w_i}(t^{(d)} - \sigma(\vec{w}\cdot\vec{x}^{(d)}))
\end{aligned}$$

Calcolo del gradiente con sigmoide

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{\partial}{\partial w_i} \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} (t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} 2(t^{(d)} - out^{(d)}) \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - out^{(d)}) \\
&= \frac{1}{N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} (t^{(d)} - out^{(d)}) \frac{\partial}{\partial w_i} (t^{(d)} - \sigma(\vec{w} \cdot \vec{x}^{(d)})) \\
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{1}{N_{Tr}} \sum_{d \in Tr} (t^{(d)} - out^{(d)})(-\frac{\partial \sigma(\vec{w} \cdot \vec{x}^{(d)})}{\partial \vec{w} \cdot \vec{x}^{(d)}} \frac{\partial \vec{w} \cdot \vec{x}^{(d)}}{\partial w_i})
\end{aligned}
$$

Calcolo del gradiente con sigmoide

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{\partial}{\partial w_i}\frac{1}{2N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}(t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}\frac{\partial}{\partial w_i}(t^{(d)} - out^{(d)})^2 \\
&= \frac{1}{2N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}2(t^{(d)} - out^{(d)})\frac{\partial}{\partial w_i}(t^{(d)} - out^{(d)}) \\
&= \frac{1}{N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}(t^{(d)} - out^{(d)})\frac{\partial}{\partial w_i}(t^{(d)} - \sigma(\vec{w}\cdot\vec{x}^{(d)})) \\
\frac{\partial E}{\partial w_i} &= \frac{1}{N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}(t^{(d)} - out^{(d)})(-\frac{\partial\sigma(\vec{w}\cdot\vec{x}^{(d)})}{\partial\vec{w}\cdot\vec{x}^{(d)}}\frac{\partial\vec{w}\cdot\vec{x}^{(d)}}{\partial w_i}) \\
&= -\frac{1}{N_{Tr}}\sum_{d\in Tr}(t^{(d)} - out^{(d)})\sigma(\vec{w}\cdot\vec{x}^{(d)})(1-\sigma(\vec{w}\cdot\vec{x}^{(d)}))x_i^{(d)}
\end{aligned}
$$