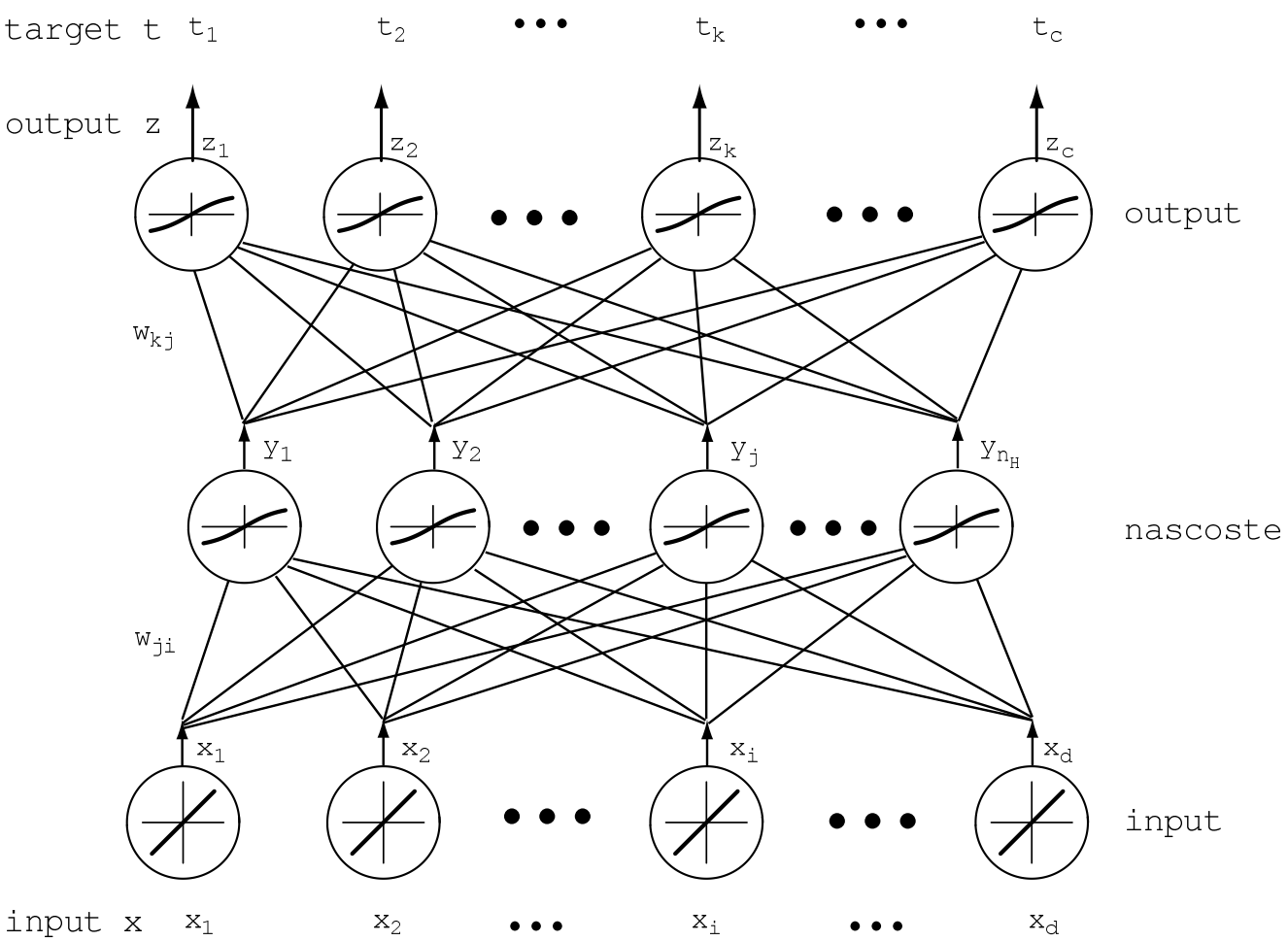
Reti Neurali Feed-forward: notazione



Reti Neurali Feed-forward: notazione

- d unità di ingresso, dimensione dei dati in ingresso $\vec{x} \equiv (x_1, \ldots, x_d)$
  ($d+1$ se si include la soglia nel vettore dei pesi $\vec{x}' \equiv (x_0, x_1, \ldots, x_d)$)
- N_H unità nascoste (con output $\vec{y} \equiv (y_1, \ldots, y_{N_H})$)
- c unità di output, dimensione dei dati in output $\vec{z} \equiv (z_1, \ldots, z_c)$
- c, dimensione dei dati desiderati $\vec{t} \equiv (t_1, \ldots, t_c)$
- w_{ji} peso dalla unità di ingresso i alla unità nascosta j
- w_{kj} peso dalla unità nascosta j alla unità di output k

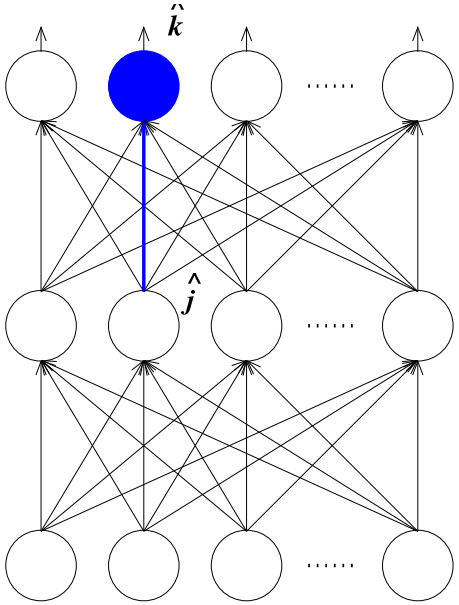
La funzione errore, considerando che si hanno c unità di output, diventa

$$E[\vec{w}] = \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{(\vec{x}^{(p)}, \vec{t}^{(p)}) \in Tr} \sum_{k=1}^{c} \left(t_k^{(p)} - z_k(\vec{x}^{(p)}) \right)^2$$

Calcolo del gradiente per i pesi di una unità di output

Fissiamo gli indici $\hat{k}$ e $\hat{j}$:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} = \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

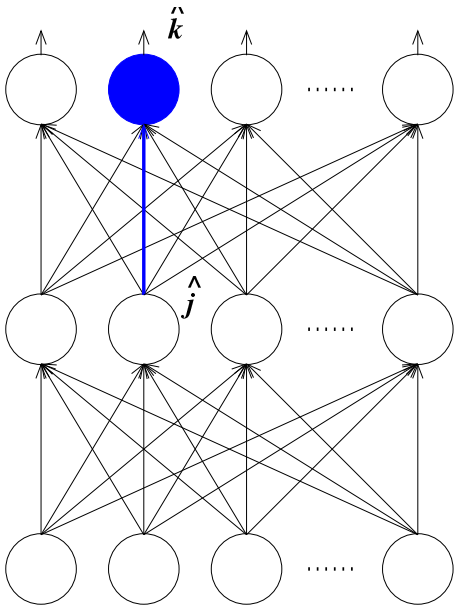


Calcolo del gradiente per i pesi di una unità di output

Fissiamo gli indici $\hat{k}$ e $\hat{j}$:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} = \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

$$= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$



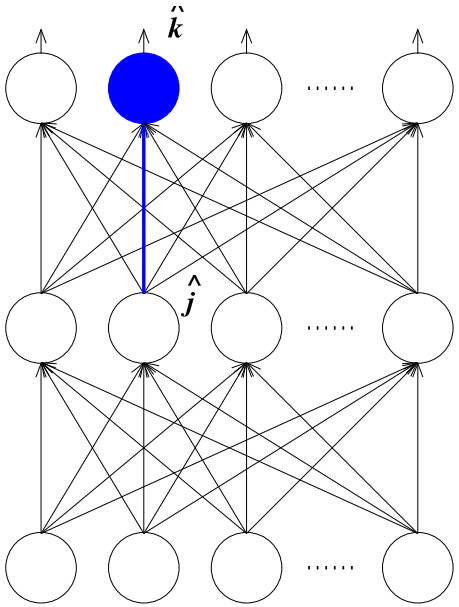
Calcolo del gradiente per i pesi di una unità di output

Fissiamo gli indici $\hat{k}$ e $\hat{j}$:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} = \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

$$= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

$$= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} 2(t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} (t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)})$$



Calcolo del gradiente per i pesi di una unità di output

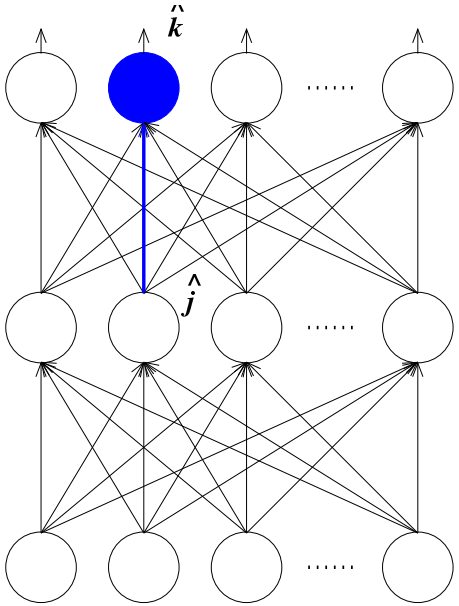
Fissiamo gli indici $\hat{k}$ e $\hat{j}$:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} = \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

$$= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

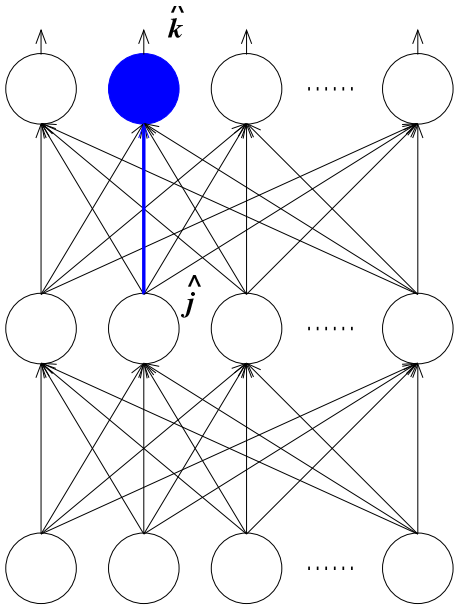
$$= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} 2(t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} (t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)})$$

$$= \frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} (t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} (t_{\hat{k}}^{(p)} - \sigma(\vec{w}_{\hat{k}} \cdot \vec{y}^{(p)}))$$



Calcolo del gradiente per i pesi di una unità di output

Fissiamo gli indici $\hat{k}$ e $\hat{j}$:



$$\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} = \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

$$= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

$$= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} 2(t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} (t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)})$$

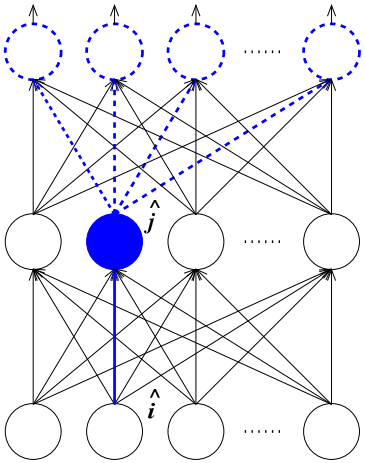
$$= \frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} (t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{k}\hat{j}}} (t_{\hat{k}}^{(p)} - \sigma(\vec{w}_{\hat{k}} \cdot \vec{y}^{(p)}))$$

$$= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} (t_{\hat{k}}^{(p)} - z_{\hat{k}}^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_{\hat{k}} \cdot \vec{y}^{(p)}) y_{\hat{j}}^{(p)}$$

Calcolo del gradiente per i pesi di una unità nascosta

Fissiamo gli indici $\hat{j}$ e $\hat{i}$:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} = \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

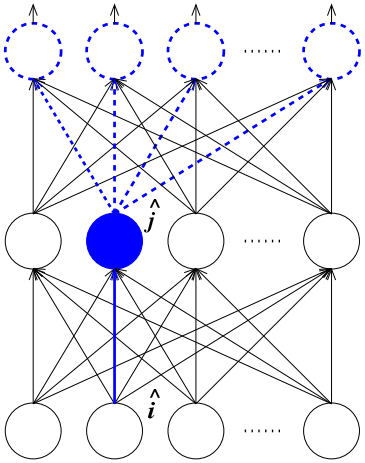


Calcolo del gradiente per i pesi di una unità nascosta

Fissiamo gli indici $\hat{j}$ e $\hat{i}$:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} = \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

$$= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$



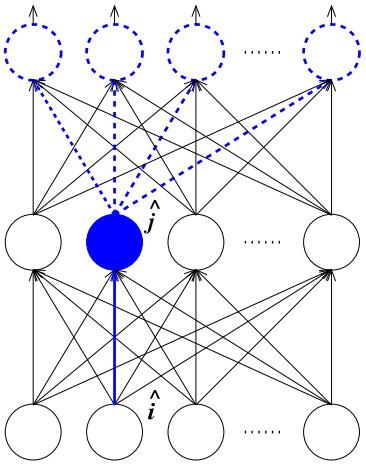
Calcolo del gradiente per i pesi di una unità nascosta

Fissiamo gli indici $\hat{j}$ e $\hat{i}$:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} = \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

$$= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

$$= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} 2(t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (-z_k^{(p)})$$

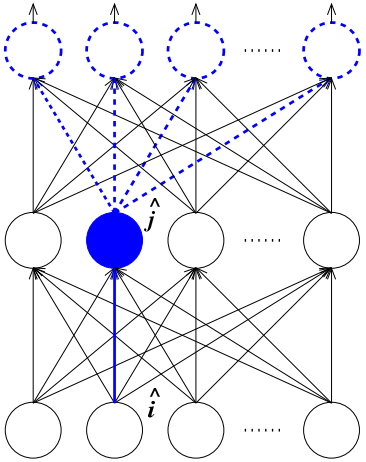


Calcolo del gradiente per i pesi di una unità nascosta

Fissiamo gli indici $\hat{j}$ e $\hat{i}$:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} = \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

$$= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$



$$= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} 2(t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (-z_k^{(p)})$$

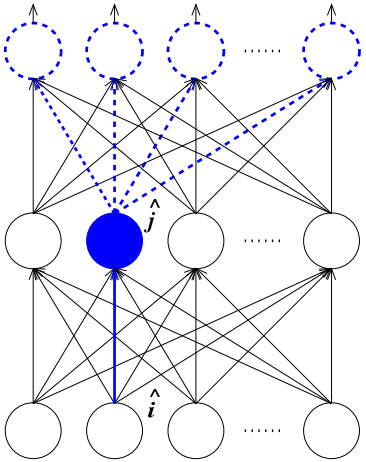
$$= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}$$

Calcolo del gradiente per i pesi di una unità nascosta

Fissiamo gli indici $\hat{j}$ e $\hat{i}$:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} = \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

$$= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$



$$= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} 2(t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (-z_k^{(p)})$$

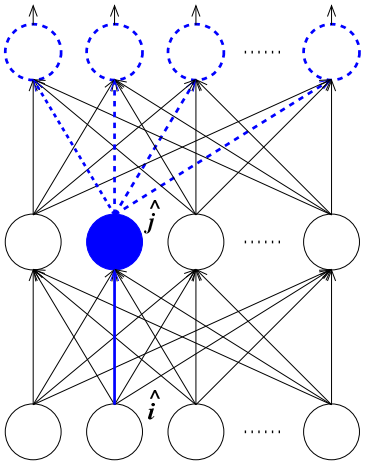
$$= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \sum_{j=1}^{N_H} w_{kj} y_j^{(p)}$$

Calcolo del gradiente per i pesi di una unità nascosta

Fissiamo gli indici $\hat{j}$ e $\hat{i}$:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} = \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

$$= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$



$$= \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} 2(t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (-z_k^{(p)})$$

$$= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \sum_{j=1}^{N_H} w_{kj} y_j^{(p)}$$

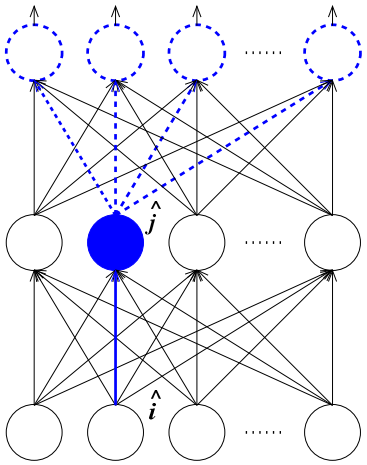
$$= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) w_{k\hat{j}} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} y_{\hat{j}}^{(p)}$$

Calcolo del gradiente per i pesi di una unità nascosta

Fissiamo gli indici $\hat{j}$ e $\hat{i}$:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} = \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} 2(t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (-z_k^{(p)})$$

$$= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \sum_{j=1}^{N_H} w_{kj} y_j^{(p)}$$



$$= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) w_{k\hat{j}} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} y_{\hat{j}}^{(p)}$$

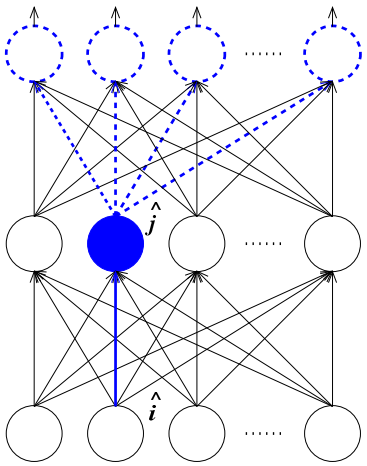
$$= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) w_{k\hat{j}} \sigma'(\vec{w}_{\hat{j}} \cdot \vec{x}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (\vec{w}_{\hat{j}} \cdot \vec{x}^{(p)})$$

Calcolo del gradiente per i pesi di una unità nascosta

Fissiamo gli indici $\hat{j}$ e $\hat{i}$:

$$\frac{\partial E}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} = \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} 2(t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (-z_k^{(p)})$$

$$= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} \sum_{j=1}^{N_H} w_{kj} y_j^{(p)}$$

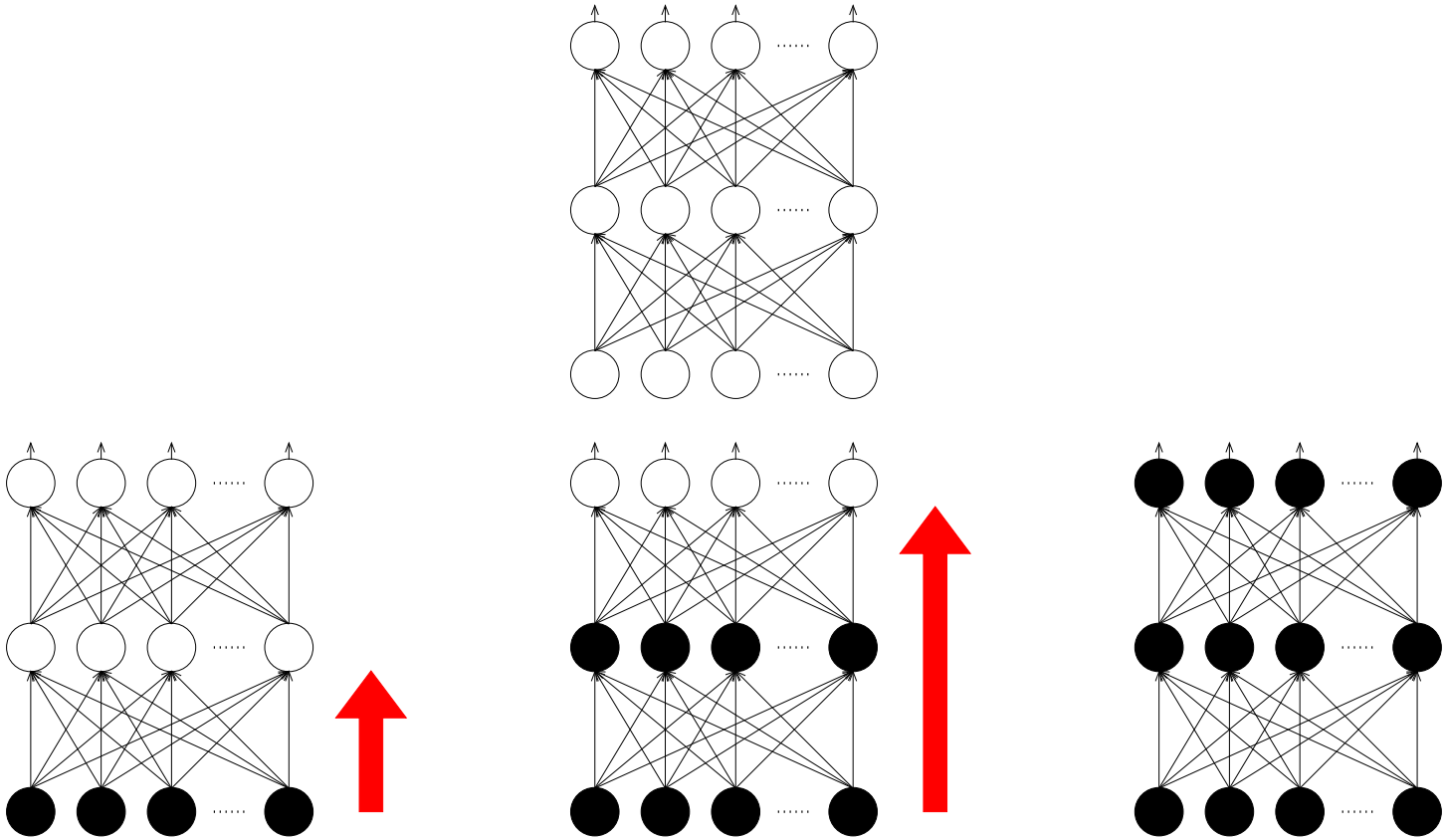


$$= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) w_{k\hat{j}} \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} y_{\hat{j}}^{(p)}$$

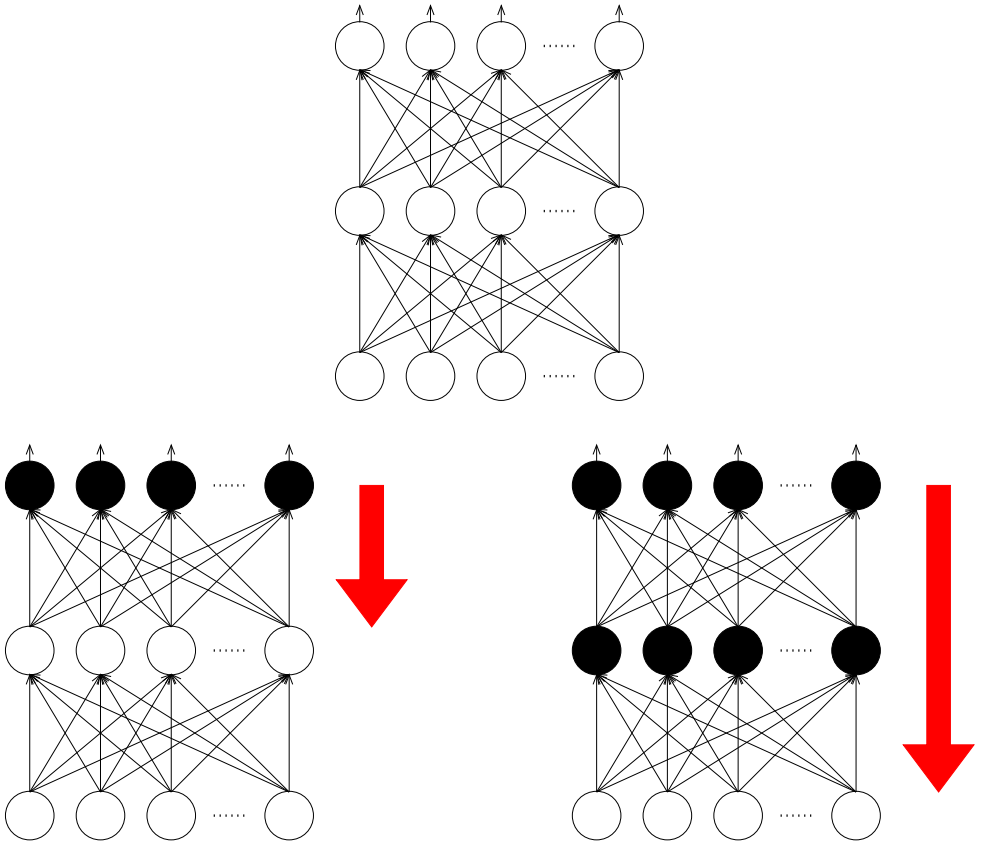
$$= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) w_{k\hat{j}} \sigma'(\vec{w}_{\hat{j}} \cdot \vec{x}^{(p)}) \frac{\partial}{\partial w_{\hat{j}\hat{i}}} (\vec{w}_{\hat{j}} \cdot \vec{x}^{(p)})$$

$$= -\frac{1}{cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)}) \sigma'(\vec{w}_k \cdot \vec{y}^{(p)}) w_{k\hat{j}} \sigma'(\vec{w}_{\hat{j}} \cdot \vec{x}^{(p)}) x_{\hat{i}}^{(p)}$$

Reti Neurali Feed-forward: Fase Forward



Reti Neurali Feed-forward: Fase Backward



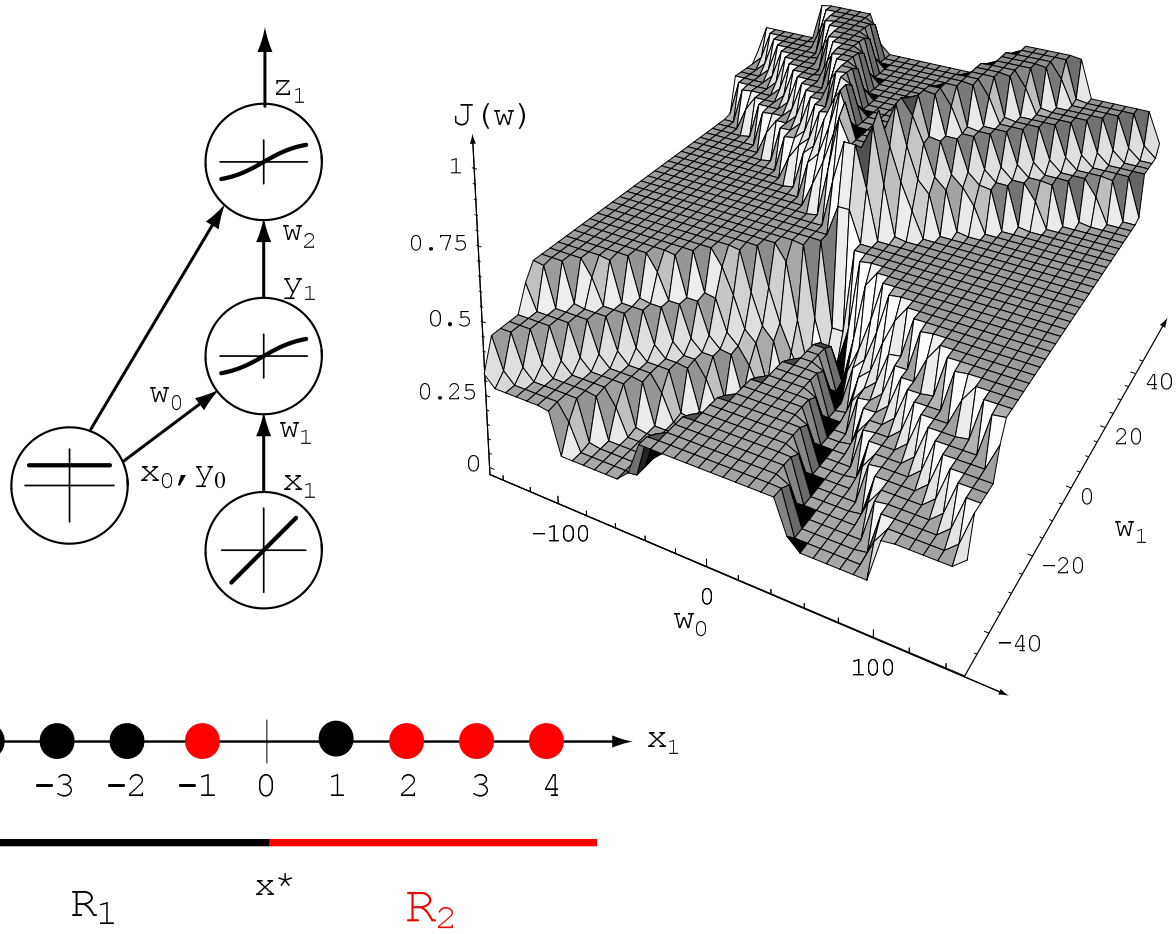
Algoritmo Back-Propagation (uno strato nascosto, stocastico)

Back-Propagation-1hl-stocastico(Tr, η, *topologia rete*)

- Inizializza tutti i pesi a valori random piccoli
- Finché la condizione di terminazione non è verificata, fai
  - Per ogni $(\vec{x}, \vec{t})$ in Tr, fai
    1. presenta $\vec{x}$ alla rete e calcola il corrispondente output
    2. Per ogni unità di output k
    $$\delta_k \leftarrow o_k(1-o_k)(t_k - o_k)$$
    3. Per ogni unità nascosta j
    $$\delta_j \leftarrow o_j(1-o_j) \sum_{k \in outputs} w_{k,j}\delta_k$$
    4. aggiorna tutti i pesi $w_{p,q}$ della rete

$$w_{s,q} \leftarrow w_{s,q} + \eta \Delta w_{s,q} \quad \text{dove} \quad \Delta w_{s,q} = \begin{cases} \delta_s x_q & \text{se } s \in nascoste \\ \delta_s y_q & \text{se } s \in outputs \end{cases}$$

Esempio di Funzione Errore



Discesa di Gradiente Batch e Stocastica

Batch:

Fai finché condizione di terminazione non soddisfatta

1. calcola $\nabla E_{Tr}[\vec{w}]$
2. $\vec{w} \leftarrow \vec{w} - \eta \nabla E_{Tr}[\vec{w}]$

Stocastica (Incrementale):

Fai finché condizione di terminazione non soddisfatta

- Per ogni esempio di apprendimento p in Tr
  1. calcola $\nabla E_{p \in Tr}[\vec{w}]$
  2. $\vec{w} \leftarrow \vec{w} - \eta \nabla E_{p \in Tr}[\vec{w}]$

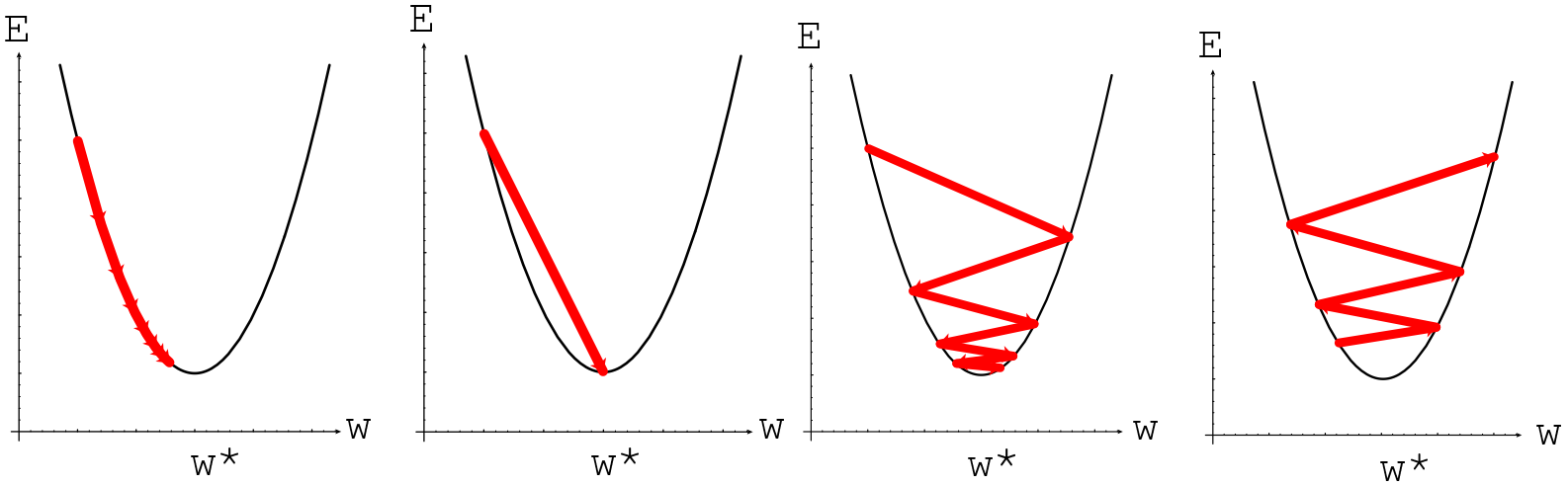
dove

$$E_{Tr}[\vec{w}] \equiv \frac{1}{2cN_{Tr}} \sum_{p \in Tr} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2 \qquad E_{p \in Tr}[\vec{w}] \equiv \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^{c} (t_k^{(p)} - z_k^{(p)})^2$$

La discesa di gradiente *Stocastica* (gradiente istantaneo) può approssimare quella *Batch* (gradiente esatto) con precisione arbitraria se η è sufficientemente piccolo

Alcuni Problemi ...

- Scelta della topologia della rete $\rightarrow$ determina lo Spazio delle Ipotesi;
- Scelta del passo di discesa (valore di η):

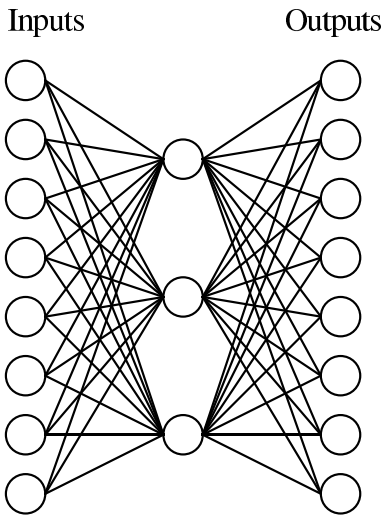


- apprendimento lento..., ma calcolo di output veloce
- MINIMI LOCALI !!

Bias Induttivo: sia nella rappresentazione che nella ricerca

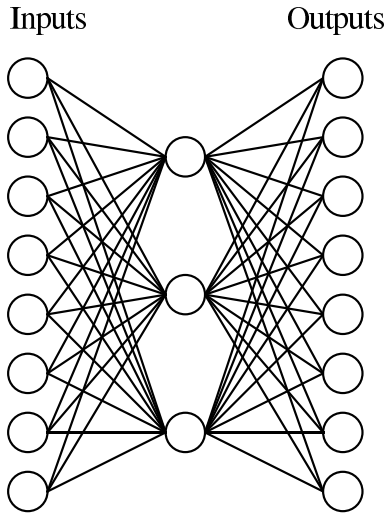
Esempio di Apprendimento per Rete Feed-forward

Compressione di Dati



Input	Output
00000001	00000001
00000010	00000010
00000100	00000100
00001000	00001000
00010000	00010000
00100000	00100000
01000000	01000000
10000000	10000000

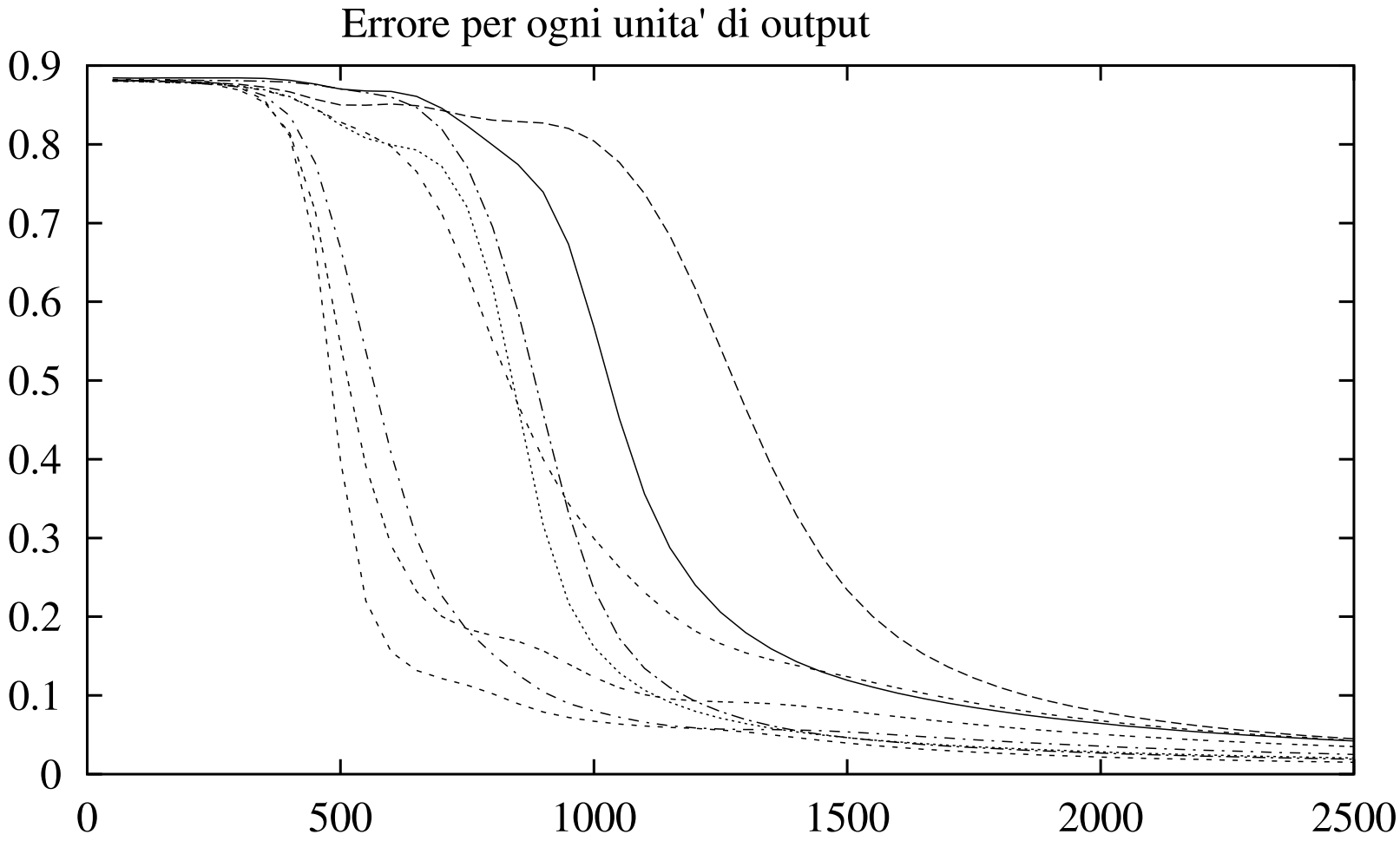
Esempio di Apprendimento per Rete Feed-forward



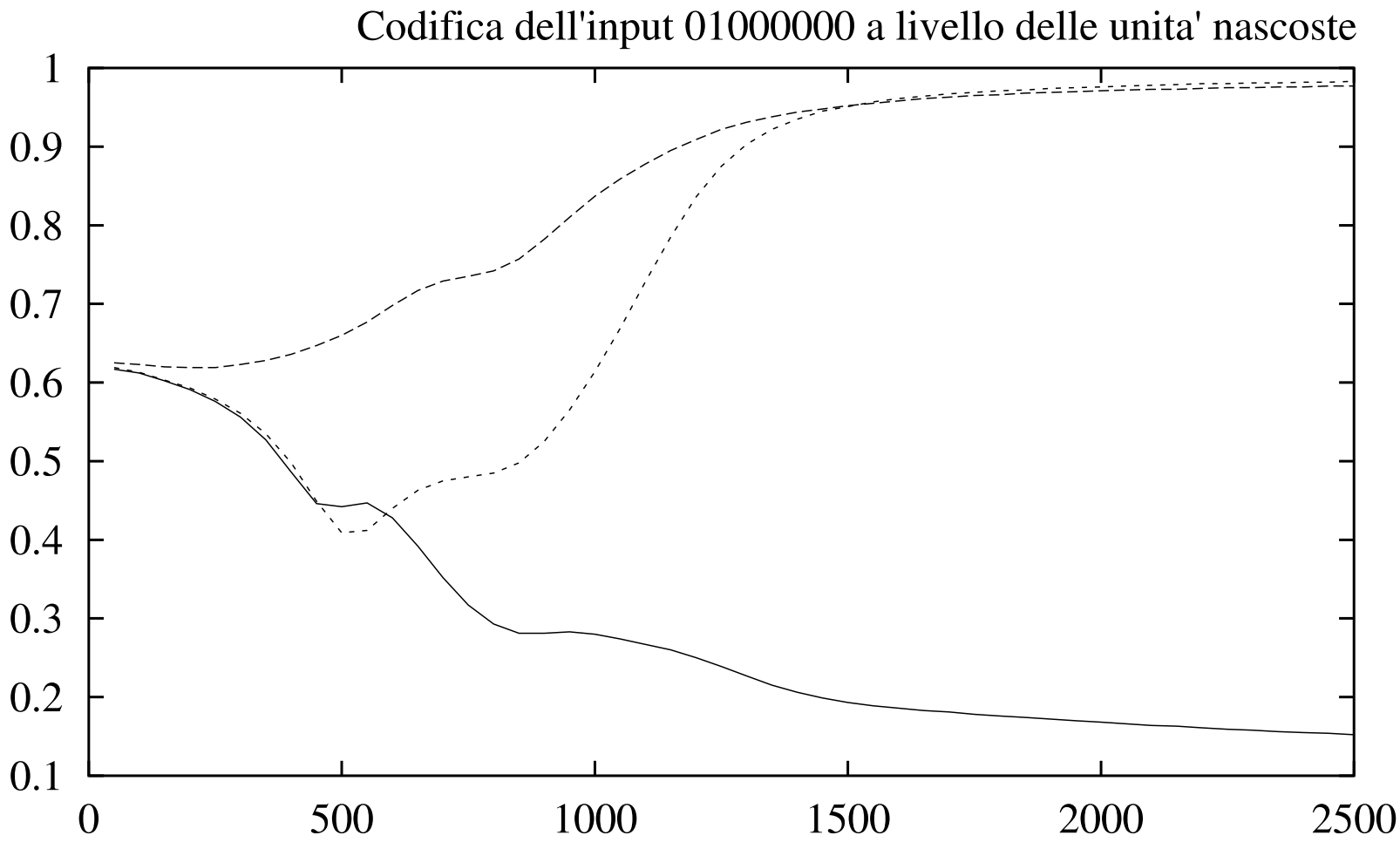
Compressione di Dati

Input		Valori Nascosti		Output
10000000	→	0.89 0.04 0.08	→	10000000
01000000	→	0.01 0.11 0.88	→	01000000
00100000	→	0.01 0.97 0.27	→	00100000
00010000	→	0.99 0.97 0.71	→	00010000
00001000	→	0.03 0.05 0.02	→	00001000
00000100	→	0.22 0.99 0.99	→	00000100
00000010	→	0.80 0.01 0.98	→	00000010
00000001	→	0.60 0.94 0.01	→	00000001

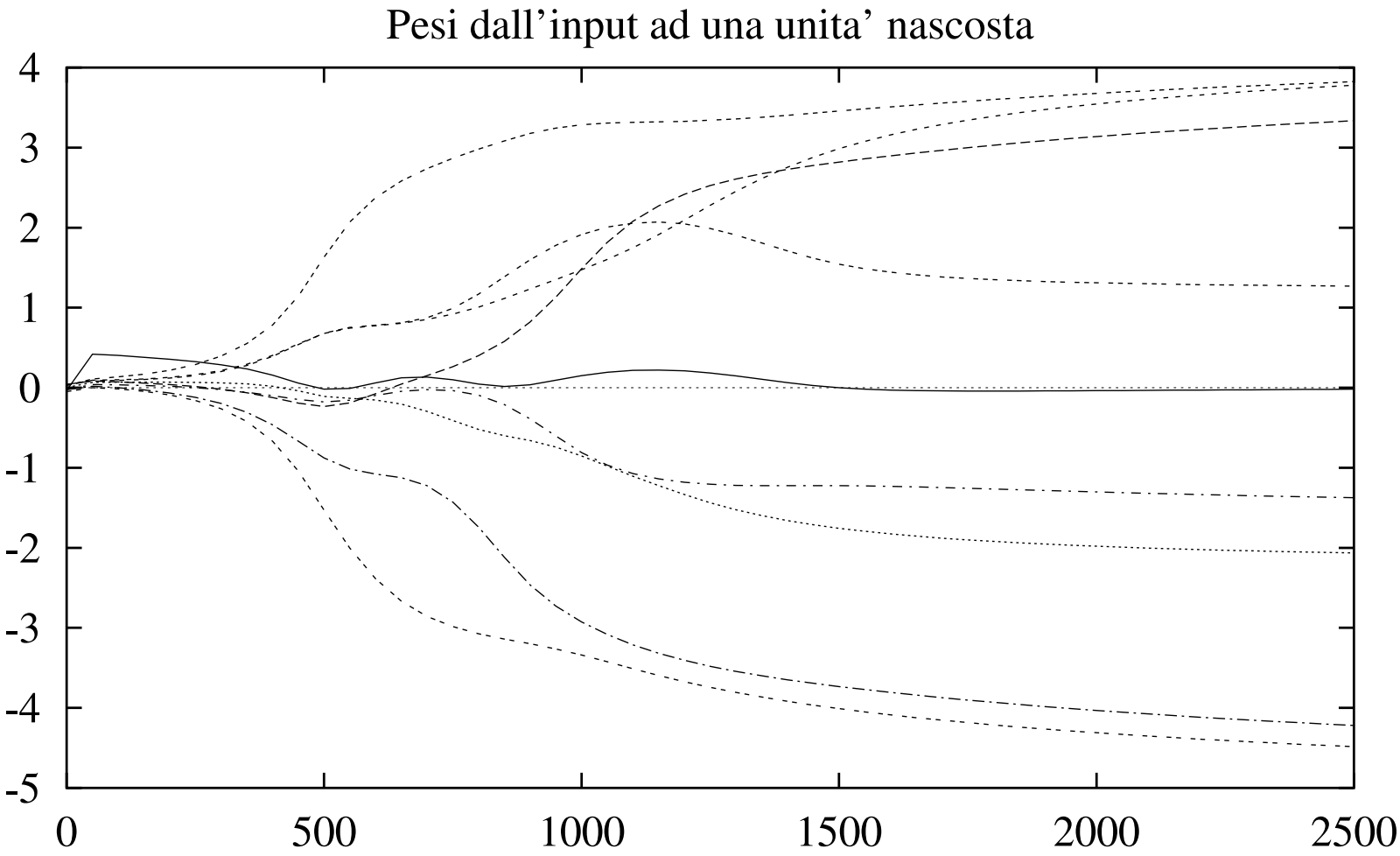
Curve di Apprendimento



Curve di Apprendimento



Curve di Apprendimento



Potere Computazionale Reti Neurali

Il seguente teorema stabilisce l'universalità di reti feed-forward come approssimatori di funzioni continue.

Teorema Sia $\varphi(\cdot)$ una funzione continua monotona crescente, limitata e noncostante. Si indichi con I_n l'ipercubo n-dimensionale $[0,1]^n$ e lo spazio delle funzioni continue su esso definite sia $C(I_n)$. Data una qualunque funzione $f \in C(I_n)$ e $\varepsilon > 0$, allora esiste un intero M e insiemi di costanti reali α_i, θ_i, e w_{ij}, dove $i = 1, \ldots, M$ e $j = 1, \ldots, n$ tale che $f(\cdot)$ possa essere approssimata da

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i \varphi(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j - \theta_i) \tag{1}$$

in modo tale che

$$|F(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)| < \varepsilon \tag{2}$$

per tutti i punti $[x_1, \ldots, x_n] \in I_n$.

Potere Computazionale Reti Neurali

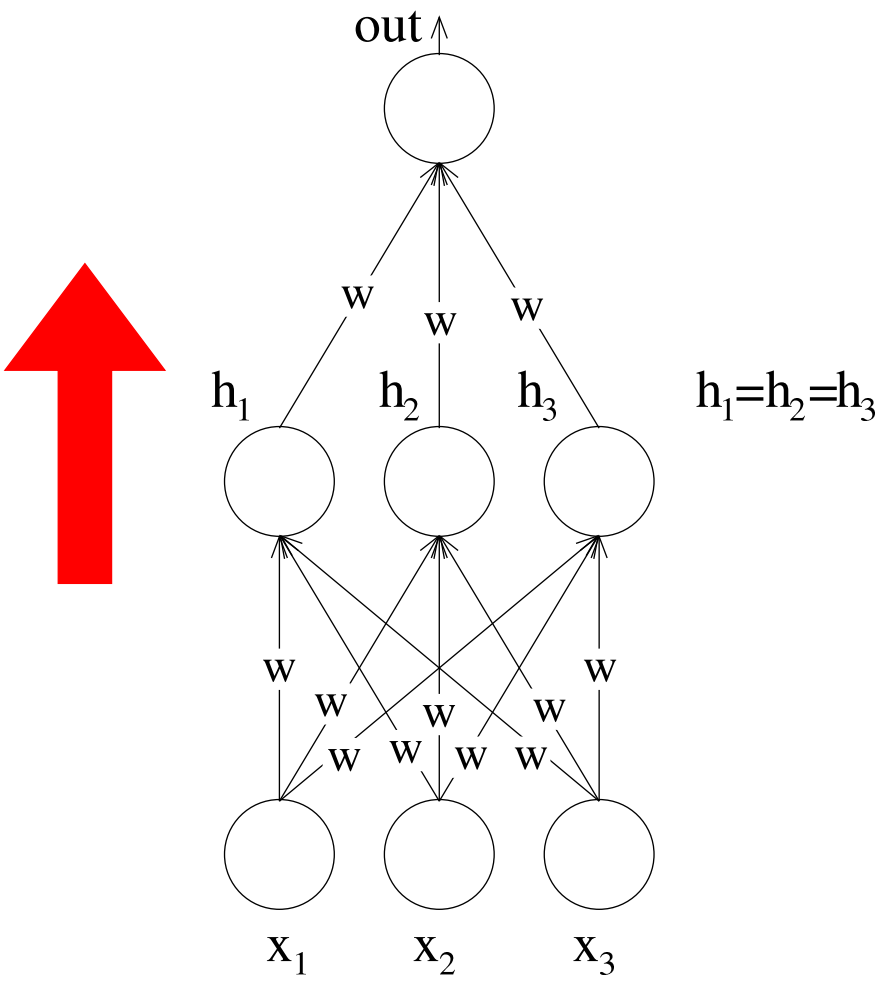
Notare che qualunque funzione sigmoidale soddisfa le condizioni imposte nel teorema su $\varphi(\cdot)$. Inoltre, l'equazione (1) rappresenta l'output di una rete multistrato descritta come segue

1. la rete ha n nodi di input ed un singolo strato di unità nascoste con M unità; gli input sono denotati da $x_1, \ldots, x_n$.
2. l'i-esima unità ha associati i pesi $w_{i1}, \ldots, w_{in}$ e soglia θ_i.
3. l'output della rete è una combinazione lineare degli output delle unità nascoste, dove i coefficienti della combinazione sono dati da $\alpha_1, \ldots, \alpha_M$.

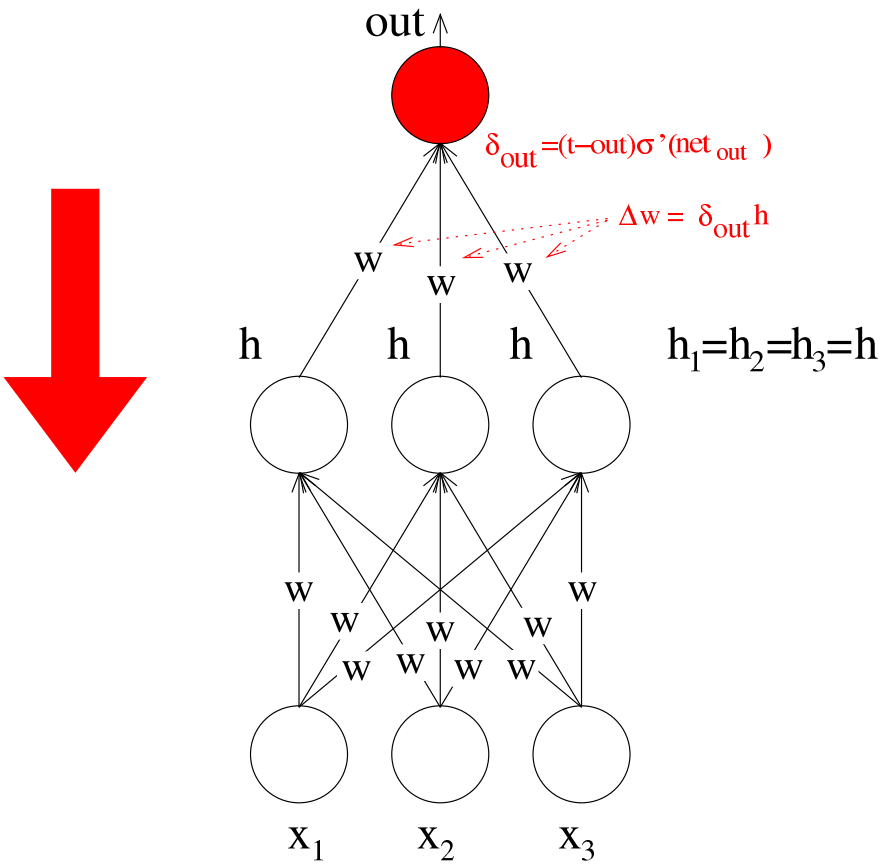
Quindi, data una tolleranza ε, una rete con un unico strato nascosto può approssimare una qualsiasi funzione in $C(I_n)$.

Si noti che il teorema afferma solo l'esistenza di una rete e non fornisce alcuna formula per il calcolo del numero M di unità nascoste necessarie per approssimare la funzione target con la tolleranza desiderata.

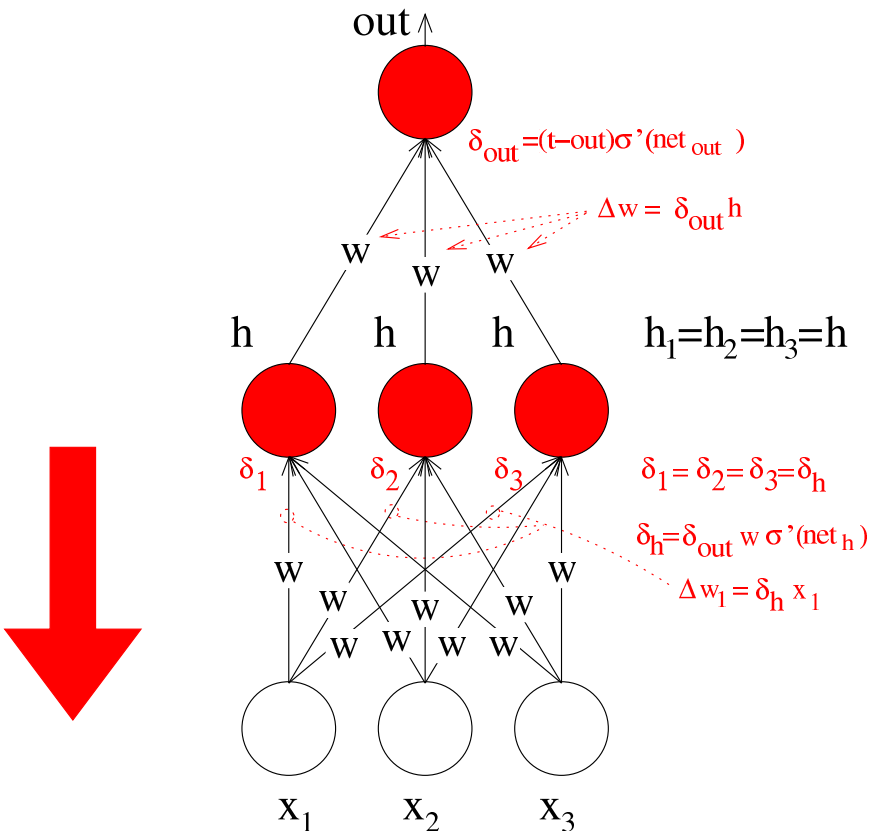
Simmetrie



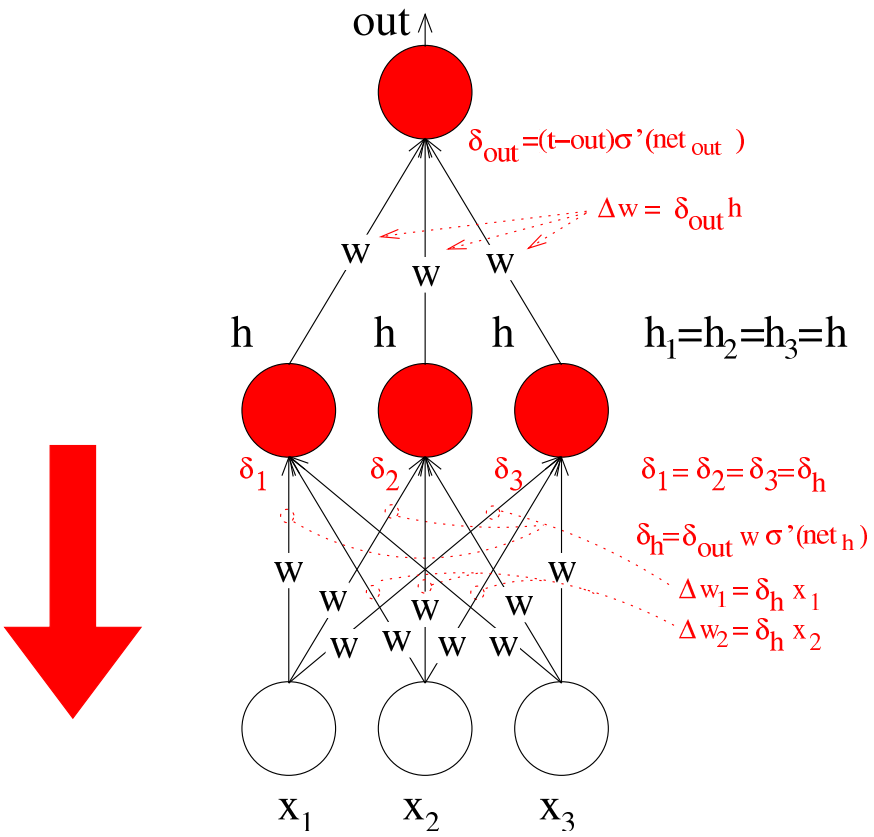
Simmetrie


out
$\delta_{out}=(t-out)\sigma'(net_{out})$
$\Delta w = \delta_{out} h$
w
h
$h_1=h_2=h_3=h$
x_1
x_2
x_3

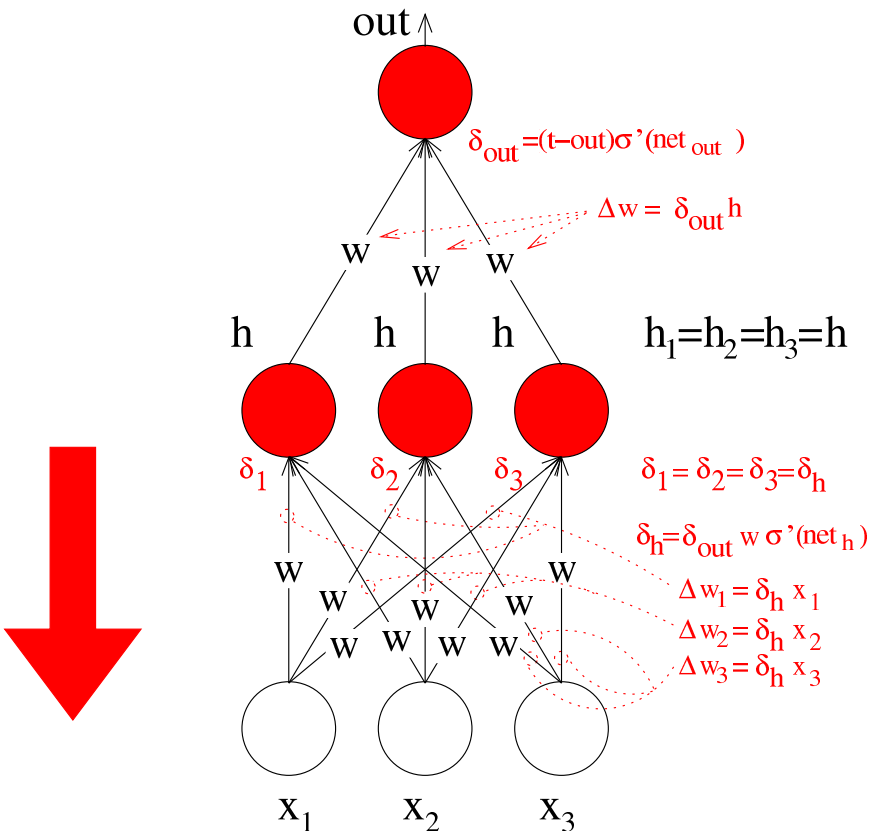
Simmetrie


out
$\delta_{out}=(t-out)\sigma'(net_{out})$
$\Delta w = \delta_{out} h$
w
h
$h_1=h_2=h_3=h$
δ_1
δ_2
δ_3
$\delta_1=\delta_2=\delta_3=\delta_h$
$\delta_h=\delta_{out}\, w\, \sigma'(net_h)$
$\Delta w_1 = \delta_h x_1$
x_1
x_2
x_3

Simmetrie


out
$\delta_{out}=(t-out)\sigma'(net_{out})$
$\Delta w = \delta_{out} h$
w
h
$h_1=h_2=h_3=h$
δ_1
δ_2
δ_3
$\delta_1=\delta_2=\delta_3=\delta_h$
$\delta_h=\delta_{out}\, w\, \sigma'(net_h)$
$\Delta w_1 = \delta_h x_1$
$\Delta w_2 = \delta_h x_2$
x_1
x_2
x_3

Simmetrie


out
$\delta_{out}=(t-out)\sigma'(net_{out})$
$\Delta w = \delta_{out} h$
w
h
$h_1=h_2=h_3=h$
δ_1
δ_2
δ_3
$\delta_1=\delta_2=\delta_3=\delta_h$
$\delta_h=\delta_{out}\, w\, \sigma'(net_h)$
$\Delta w_1 = \delta_h x_1$
$\Delta w_2 = \delta_h x_2$
$\Delta w_3 = \delta_h x_3$
x_1
x_2
x_3

Apprendimento Perceptron: prova di convergenza

Sia dato un insieme di esempi $Tr = \{(\vec{x}^{(i)}, t^{(i)})\}$, dove $t \in \{-1, +1\}$ (classifi cazione binaria)

Se $\exists \vec{w}^*$ t.c. (lineare separabilità)

$$\forall i,\ t^{(i)}(\vec{w}^* \cdot \vec{x}^{(i)}) \geq \delta = \min_i\ t^{(i)}(\vec{w}^* \cdot \vec{x}^{(i)}) > 0$$

allora

$$\forall i,\ \vec{w}^* \cdot (t^{(i)}\vec{x}^{(i)}) \geq \delta$$

cioè $\vec{w}^*$ è soluzione anche del problema di apprendimento defi nito dall'insieme di apprendimento $Tr' = \{(t^{(i)}\vec{x}^{(i)}, +1)\}$ e viceversa

Quindi ci possiamo concentrare su problemi dove **tutti gli esempi sono positivi**

Apprendimento Perceptron: prova di convergenza

Supponiamo che

- $\vec{w} = \vec{w}(0) = 0$ (inizializzazione)
- $\eta = \frac{1}{2}$ e $\forall i,\ \|\vec{x}^{(i)}\|^2 \leq K$

Dopo aver commesso q errori (tutti falsi negativi) si avrà

$$\vec{w}(q) = \sum_{j=1}^{q} \vec{x}^{(i_j)}$$

infatti all' errore j-esimo il vettore dei pesi è aggiornato sommandogli l'input $\vec{x}^{(i_j)}$ classifi cato erroneamente:

$$\vec{w}(j) = \vec{w}(j-1) + \vec{x}^{(i_j)}$$

Apprendimento Perceptron: prova di convergenza

Mostriamo adesso che il modulo di $\vec{w}(q)$ non può crescere indefi nitivamente (succede se non si converge ad una soluzione in un numero fi nito di iterazioni)

Iniziamo defi nendo un lower bound sul modulo di $\vec{w}(q)$:

$$\vec{w}^* \cdot \vec{w}(q) = \vec{w}^* \sum_{j=1}^{q} \vec{x}^{(i_j)} \geq q\delta \quad \text{(ricordiamo che } \delta = \min_i \ \vec{w}^* \cdot \vec{x}^{(i)})$$

e per la disuguaglianza di Cauchy-Swartz ($[\vec{x} \cdot \vec{y}]^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$) abbiamo

$$\|\vec{w}^*\|^2 \|\vec{w}(q)\|^2 \geq [\vec{w}^* \cdot \vec{w}(q)]^2 \geq [q\delta]^2 \ \Rightarrow \ \|\vec{w}(q)\|^2 \geq \frac{[q\delta]^2}{\|\vec{w}^*\|^2}$$

Apprendimento Perceptron: prova di convergenza

Defi niamo adesso un upper bound sul modulo di $\vec{w}(q)$:

$$\|\vec{w}(q)\|^2 = \|\vec{w}(q-1)+\vec{x}^{(i_q)}\|^2 = \|\vec{w}(q-1)\|^2 + 2\vec{w}(q-1)\cdot\vec{x}^{(i_q)} + \|\vec{x}^{(i_q)}\|^2$$

e poiché $\vec{w}(q-1)\cdot\vec{x}^{(i_q)} < 0$ (q-esimo errore)

$$\|\vec{w}(q)\|^2 \leq \|\vec{w}(q-1)\|^2 + \|\vec{x}^{(i_q)}\|^2$$

Applicando ricorsivamente questa disuguaglianza su tutti gli errori abbiamo

$$\|\vec{w}(q)\|^2 \leq \sum_{i=1}^{q} \|\vec{x}^{(i_q)}\|^2 \leq qK$$

Apprendimento Perceptron: prova di convergenza

Mettendo insieme il lower bound con l'upper bound otteniamo:

$$\frac{[q\delta]^2}{||\vec{w}^*||^2} \leq ||\vec{w}(q)||^2 \leq qK$$

Pertanto il numero massimo di errori q_{max} che si possono commettere mantenendo i due vincoli soddisfatti è ottenuto quando vale l'uguaglianza dei bound:

$$\frac{[q_{max}\delta]^2}{||\vec{w}^*||^2} = q_{max}K$$

da cui si ottiene

$$q_{max} = \frac{||\vec{w}^*||^2 K}{\delta^2}$$

Quindi, in caso di lineare separabilità, l'algoritmo di apprendimento del Perceptron commette un numero fi nito di errori, al pi`u $\frac{||\vec{w}^*||^2 K}{\delta^2}$