Inferenza in Reti Bayesiane

Corso di Sistemi Intelligenti, Capitolo 14.4–5

Outline

- ♢ Inferenza esatta tramite enumerazione
- ♢ Inferenza esatta tramite eliminazione di variabile
- ♢ Inferenza approssimata tramite simulazione stocastica
- ♢ Inferenza approssimata tramite Markov chain Monte Carlo

Compiti di inferenza

Query semplici: calcolare la probabilità a posteriori marginale $\mathbf{P}(X_i|\mathbf{E}=\mathbf{e})$
p.e., $P(NoGas|Gauge=empty, Lights=on, Starts=false)$

Query congiuntive: $\mathbf{P}(X_i, X_j|\mathbf{E}=\mathbf{e}) = \mathbf{P}(X_i|\mathbf{E}=\mathbf{e})\mathbf{P}(X_j|X_i, \mathbf{E}=\mathbf{e})$

Decisioni ottimali: reti di decisioni includono informazioni di utilità;
inferenza probabilistica richiesta per $P(outcome|action, evidence)$

Recupero informazione: quale evidenza si deve cercare?

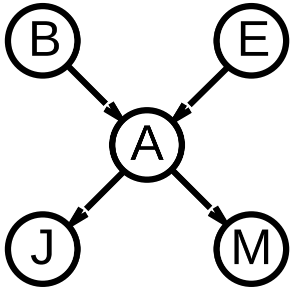
Analisi della sensitività: quali valori di probabilità sono i più critici?

Spiegazione: perché ho bisogno di un nuovo motore di avviamento?

Inferenza tramite enumerazione

Modo un pò più furbo per marginalizzare alcune variabili dalla distribuzione congiunta senza costruire esplicitamente la sua rappresentazione

Query semplice sulla rete dell'allarme:



$\mathbf{P}(B|j,m)$
$= \mathbf{P}(B,j,m)/P(j,m)$
$= \alpha\mathbf{P}(B,j,m)$
$= \alpha\sum_e\sum_a\mathbf{P}(B,e,a,j,m)$

Riscrittura di entrate della distribuzione congiunta usando il prodotto di entrate di CPT:

$\mathbf{P}(B|j,m)$
$= \alpha\sum_e\sum_a\mathbf{P}(B)P(e)\mathbf{P}(a|B,e)P(j|a)P(m|a)$
$= \alpha\mathbf{P}(B)\sum_e P(e)\sum_a\mathbf{P}(a|B,e)P(j|a)P(m|a)$

Enumerazione ricorsiva depth-first: $O(n)$ in spazio, $O(d^n)$ in tempo

Algoritmo di enumerazione

function ENUMERATION-ASK(X, $\mathbf{e}$, bn) **returns** a distribution over X
    inputs: X, the query variable
        $\mathbf{e}$, observed values for variables $\mathbf{E}$
        bn, a Bayesian network with variables $\{X\} \cup \mathbf{E} \cup \mathbf{Y}$

    $\mathbf{Q}(X) \leftarrow$ a distribution over X, initially empty
    for each value x_i of X **do**
        extend $\mathbf{e}$ with value x_i for X
        $\mathbf{Q}(x_i) \leftarrow$ ENUMERATE-ALL(VARS[bn], $\mathbf{e}$)
    return NORMALIZE($\mathbf{Q}(X)$)

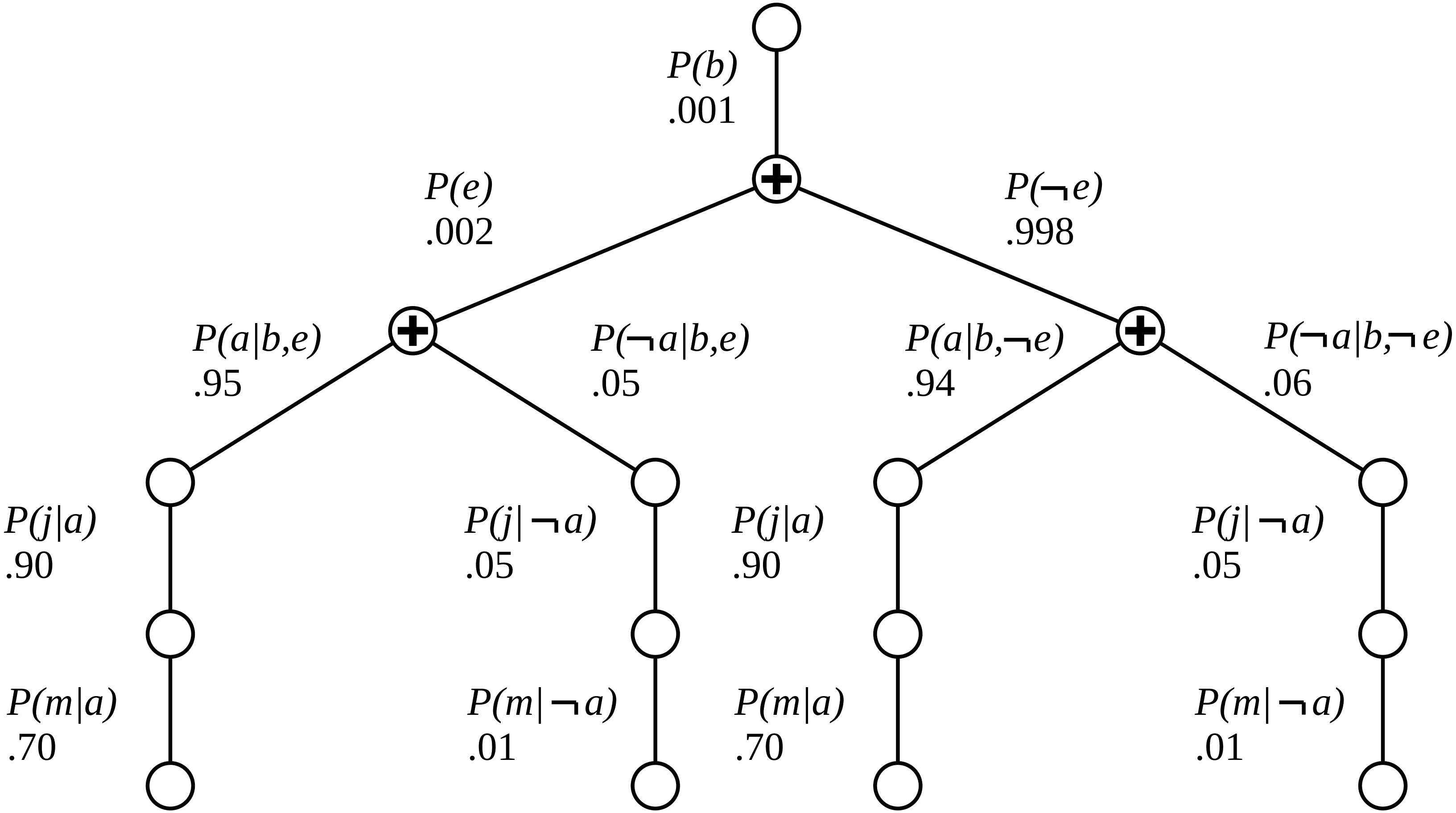
---

function ENUMERATE-ALL($vars$, $\mathbf{e}$) **returns** a real number
    if EMPTY?($vars$) **then return** 1.0
    $Y \leftarrow$ FIRST($vars$)
    if Y has value y in $\mathbf{e}$
        then return $P(y \mid Pa(Y)) \times$ ENUMERATE-ALL(REST($vars$), $\mathbf{e}$)
        else return $\Sigma_y\ P(y \mid Pa(Y)) \times$ ENUMERATE-ALL(REST($vars$), $\mathbf{e}_y$)
            where $\mathbf{e}_y$ is $\mathbf{e}$ extended with $Y = y$

Albero di valutazione

L'enumerazione è inefficiente: calcoli ripetuti

p.e., calcola $P(j|a)P(m|a)$ per ogni valore di e



Inferenza tramite eliminazione di variabile

Eliminazione di variabile: effettuare le somme da destra a sinista, memorizzare i risultati intermedi (fattori) per evitare di ricalcolarli

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(B|j,m) \\
&= \alpha\, \underbrace{\mathbf{P}(B)}_{B} \textstyle\sum_e \underbrace{P(e)}_{E} \textstyle\sum_a \underbrace{\mathbf{P}(a|B,e)}_{A} \underbrace{P(j|a)}_{J} \underbrace{P(m|a)}_{M} \\
&= \alpha \mathbf{P}(B) \textstyle\sum_e P(e) \textstyle\sum_a \mathbf{P}(a|B,e) P(j|a) f_M(a) \\
&= \alpha \mathbf{P}(B) \textstyle\sum_e P(e) \textstyle\sum_a \mathbf{P}(a|B,e) f_J(a) f_M(a) \\
&= \alpha \mathbf{P}(B) \textstyle\sum_e P(e) \textstyle\sum_a f_A(a,b,e) f_J(a) f_M(a) \\
&= \alpha \mathbf{P}(B) \textstyle\sum_e P(e) f_{\bar{A}JM}(b,e) \text{ (elimina } A\text{)} \\
&= \alpha \mathbf{P}(B) f_{\bar{E}\bar{A}JM}(b) \text{ (elimina } E\text{)} \\
&= \alpha f_B(b) \times f_{\bar{E}\bar{A}JM}(b)
\end{aligned}
$$

Eliminazione di variabile: operazioni base

Eliminare una variabile da un prodotto di fattori:

1. muovere i fattori costanti al di fuori della somma
2. aggiungere le sottomatrici al prodotto "pointwise" dei fattori rimanenti

$$\sum_x f_1 \times \cdots \times f_k = f_1 \times \cdots \times f_i \sum_x f_{i+1} \times \cdots \times f_k = f_1 \times \cdots \times f_i \times f_{\bar{X}}$$

assumendo che $f_1, \ldots, f_i$ non dipendano da X

Prodotto pointwise di fattori f_1 e f_2:

$$f_1(x_1, \ldots, x_j, y_1, \ldots, y_k) \times f_2(y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l)$$
$$= f(x_1, \ldots, x_j, y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l)$$

P.e., $f_1(a, b) \times f_2(b, c) = f(a, b, c)$

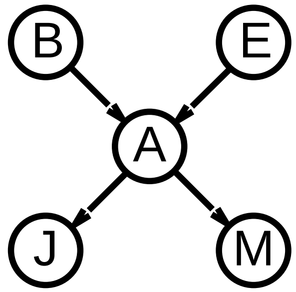
Algoritmo di eliminazione di variabile

function ELIMINATION-ASK(X, $\mathbf{e}$, bn) **returns** a distribution over X
  inputs: X, the query variable
    $\mathbf{e}$, evidence specified as an event
    bn, a belief network specifying joint distribution $\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n)$

  $factors \leftarrow [\,]$; $vars \leftarrow$ REVERSE(VARS[bn])
  for each var **in** $vars$ **do**
    $factors \leftarrow$ [MAKE-FACTOR(var, $\mathbf{e}$)|$factors$]
    if var is a hidden variable **then** $factors \leftarrow$ SUM-OUT(var, $factors$)
  return NORMALIZE(POINTWISE-PRODUCT($factors$))

Variabili irrilevanti

Consideriamo la query $P(JohnCalls|Burglary = true)$



$$P(J|b) = \alpha P(b) \sum_e P(e) \sum_a P(a|b,e) P(J|a) \sum_m P(m|a)$$

La somma su m è uguale a 1; M è **irrilevante** per la query

Thm 1: Y è irrilevante a meno che $Y \in Ancestors(\{X\} \cup \mathbf{E})$

Qui, $X = JohnCalls$, $\mathbf{E} = \{Burglary\}$, e
$Ancestors(\{X\} \cup \mathbf{E}) = \{Alarm, Earthquake\}$
quindi M è irrilevante

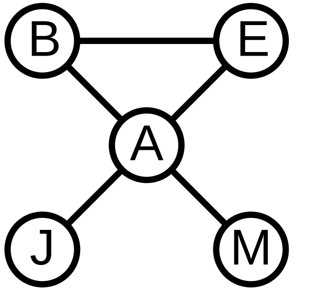
(Confrontare con backward chaining a partire dalla query in KB con clausole di Horn)

Variabili irrilevanti

Defn: grafo moralizzato di una rete bayesiana: sposare tutti i genitori ed eliminare la direzione degli archi

Defn: $\mathbf{F}$ è m-separato da $\mathbf{G}$ tramite $\mathbf{H}$ sse è separato tramite $\mathbf{H}$ nel grafo moralizzato

Thm 2: Y è irrilevante se m-separato da X tramite $\mathbf{E}$



Per $P(JohnCalls|Alarm = true)$, sia $Burglary$ che $Earthquake$ sono irrilevanti

Complessità dell'inferenza esatta

Reti singolarmente connesse (o polytree):

– ogni coppia di nodi è connessa da al più un cammino (non diretto)

– il costo in tempo e spazio della eliminazione di variabile è $O(d^k n)$

Reti connesse più che singolarmente:

– possibile ridurre 3SAT alla inferenza esatta $\Rightarrow$ NP-hard

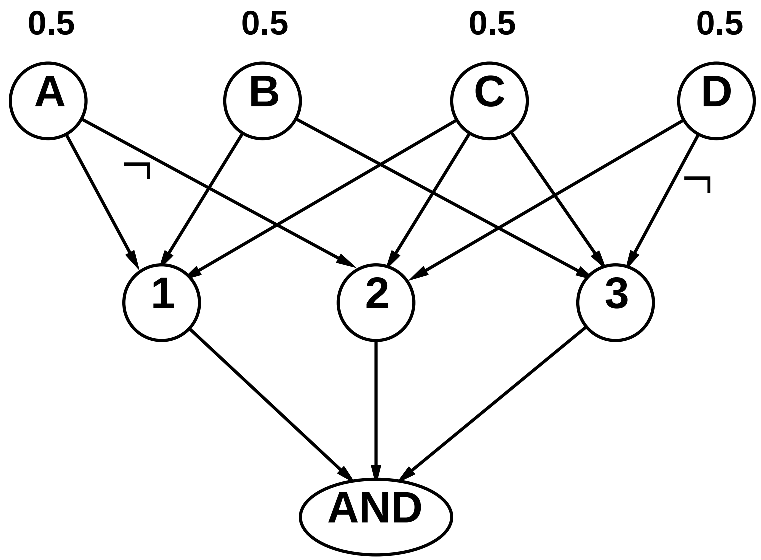
– equivalente a modelli 3SAT con **conteggio** (del numero di soluzioni)

$\Rightarrow$ #P-complete

1. A v B v C

2. C v D v ¬A

3. B v C v ¬D



Inferenza tramite simulazione stocastica

Idea base:

1) Estrarre N campioni da una distribuzione di campionamento S
2) Calcolare la probabilità a posteriori approssimata $\hat{P}$
3) Mostrare che converge alla vera probabilità P

0.5

Coin

Outline:

– Campionamento da una rete vuota
– Rejection sampling: rigettare i campioni in disaccordo con l'evidenza
– Likelihood weighting: usare l'evidenza per pesare i campioni
– Markov chain Monte Carlo (MCMC): campiona in accordo ad un processo stocastico la cui distribuzione stazionaria è la vera probabilità

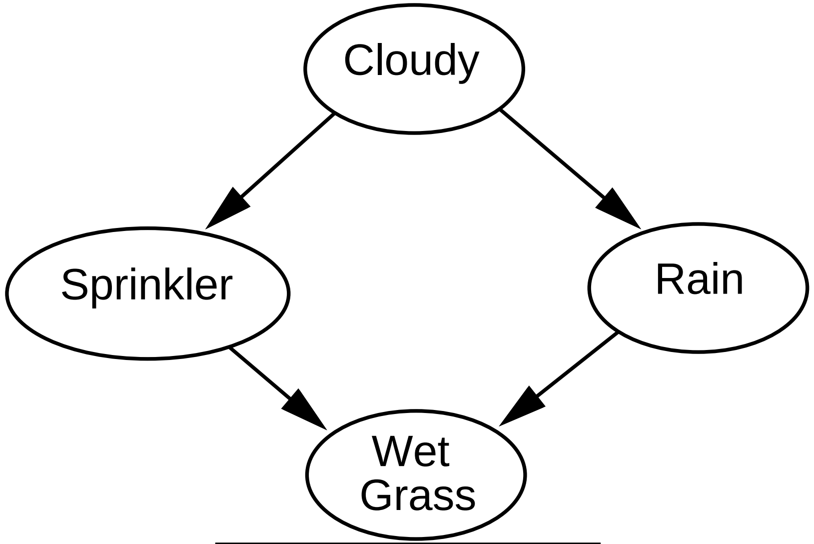
Campionamento da una rete vuota

function PRIOR-SAMPLE(bn) **returns** an event sampled from bn
  inputs: bn, a belief network specifying joint distribution $\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n)$

  $\mathbf{x} \leftarrow$ an event with n elements
  for $i = 1$ **to** n **do**
    $x_i \leftarrow$ a random sample from $\mathbf{P}(X_i \mid Parents(X_i))$
  return $\mathbf{x}$

Esempio

P(C)
.50



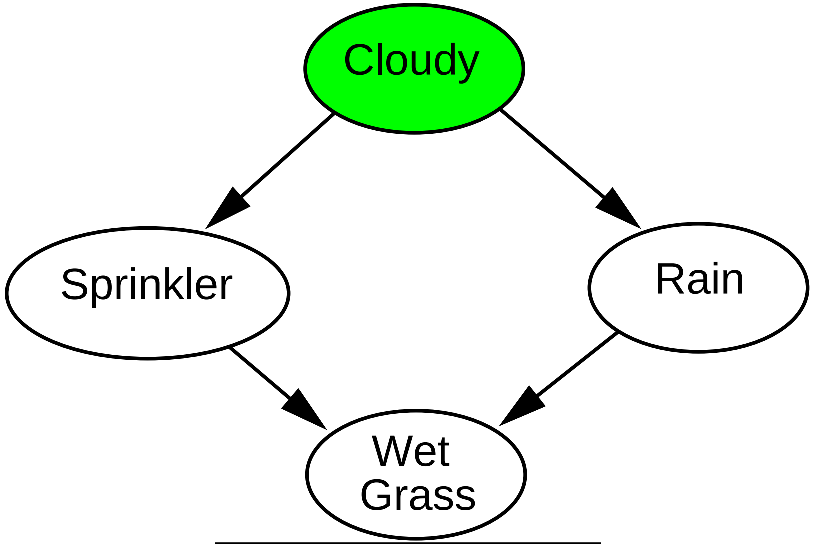
C	P(S|C)
T	.10
F	.50

C	P(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

Esempio

P(C)
.50



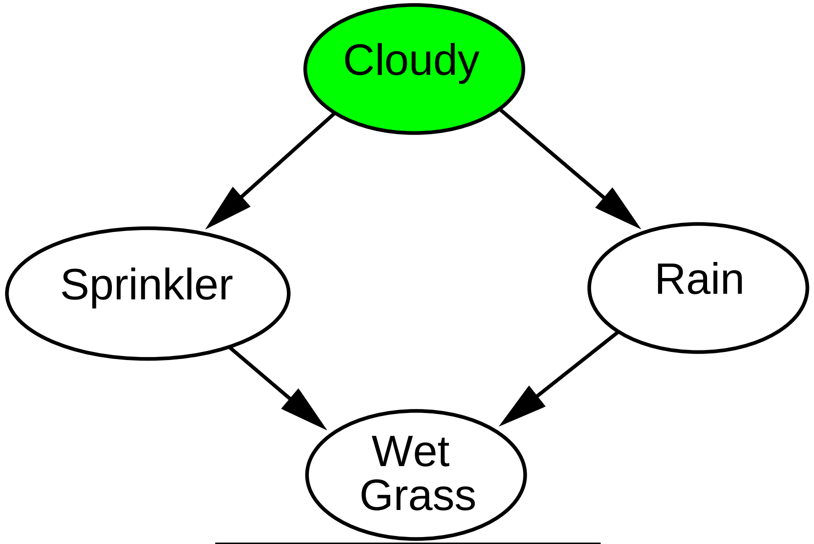
C	P(S|C)
T	.10
F	.50

C	P(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

Esempio

P(C)
.50



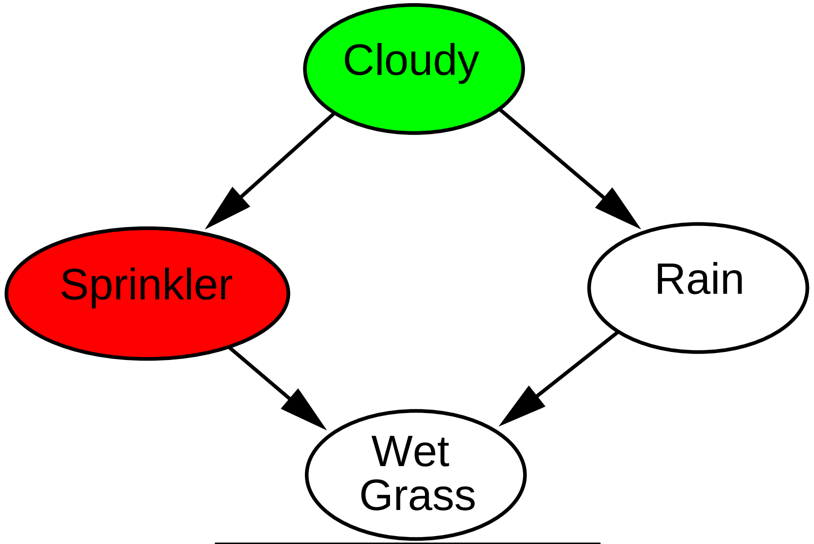
C	P(S|C)
T	.10
F	.50

C	P(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

Esempio

P(C)
.50



C	P(S|C)
T	.10
F	.50

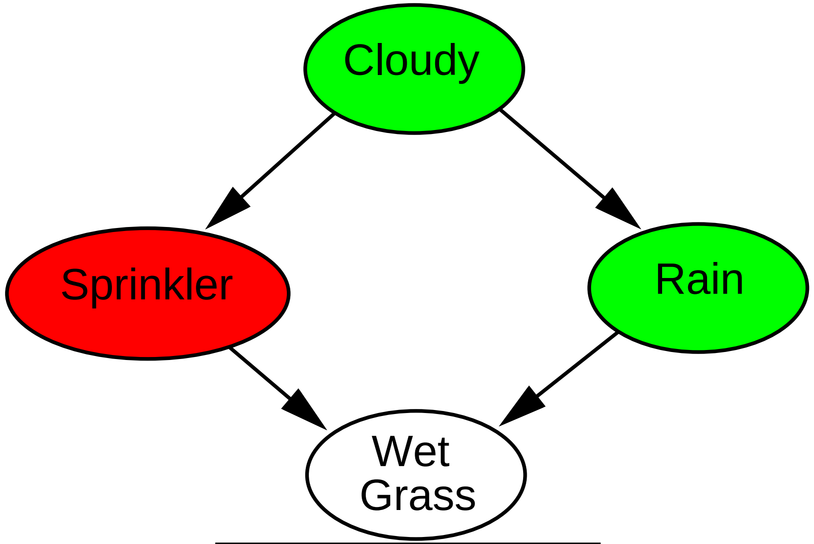
C	P(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

Esempio

P(C)
.50

C	P(S|C)
T	.10
F	.50

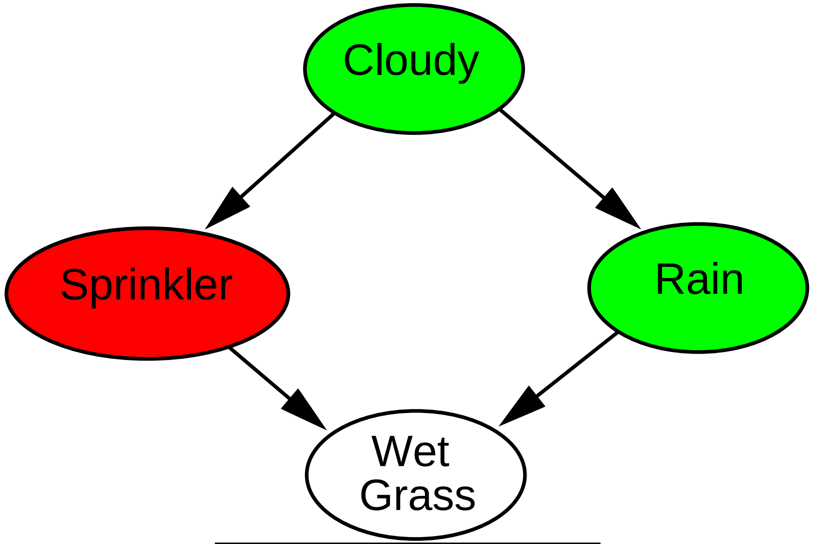


C	P(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

Esempio

P(C)
.50



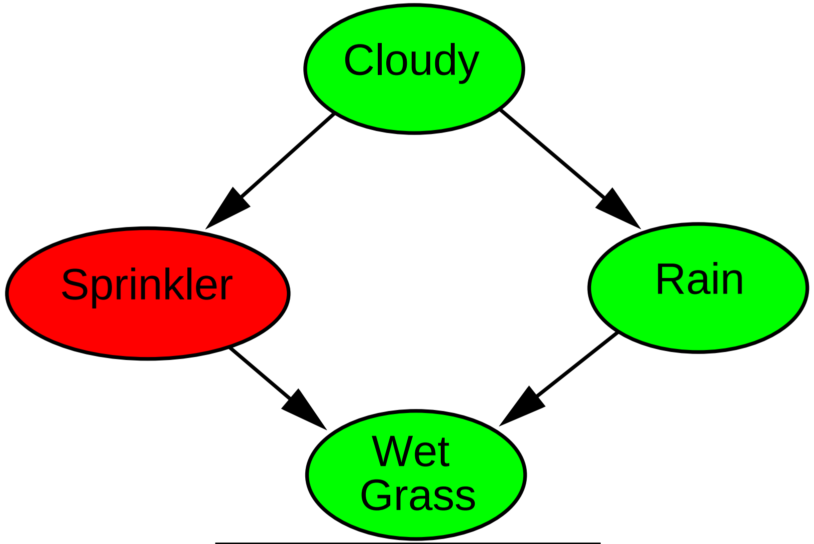
C	P(S|C)
T	.10
F	.50

C	P(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

Esempio

P(C)
.50



C	P(S|C)
T	.10
F	.50

C	P(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

Campionamento da una rete vuota

Probabilità che PriorSample generi un evento particolare

$$S_{PS}(x_1 \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i|Parents(X_i)) = P(x_1 \dots x_n)$$

cioè, la vera probabilità a priori

P.e., $S_{PS}(t, f, t, t) = 0.5 \times 0.9 \times 0.8 \times 0.9 = 0.324 = P(t, f, t, t)$

Posto $N_{PS}(x_1 \dots x_n)$ essere il numero di campioni generati per l'evento $x_1, \dots, x_n$

Allora abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} \hat{P}(x_1, \dots, x_n) &= \lim_{N\to\infty} N_{PS}(x_1, \dots, x_n)/N \\ &= S_{PS}(x_1, \dots, x_n) \\ &= P(x_1 \dots x_n) \end{aligned}$$

Cioè, stime derivate da PriorSample sono consistenti

In breve: $\hat{P}(x_1, \dots, x_n) \approx P(x_1 \dots x_n)$

Rejection sampling

$\hat{\mathbf{P}}(X|\mathbf{e})$ stimate da campioni in accordo con $\mathbf{e}$

```
function REJECTION-SAMPLING(X, e, bn, N) returns an estimate of P(X|e)
    local variables: N, a vector of counts over X, initially zero

    for j = 1 to N do
        x ← PRIOR-SAMPLE(bn)
        if x is consistent with e then
            N[x] ← N[x]+1 where x is the value of X in x
    return NORMALIZE(N[X])
```

P.e., stimare $\mathbf{P}(Rain|Sprinkler = true)$ usando 100 campioni

27 campioni hanno $Sprinkler = true$

Di questi, 8 hanno $Rain = true$ e 19 hanno $Rain = false$.

$\hat{\mathbf{P}}(Rain|Sprinkler = true) = \textsc{Normalize}(\langle 8, 19\rangle) = \langle 0.296, 0.704\rangle$

Analisi di rejection sampling

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{P}}(X|\mathbf{e}) &= \alpha\mathbf{N}_{PS}(X,\mathbf{e}) \qquad \text{(def. algoritmo)}\\ &= \mathbf{N}_{PS}(X,\mathbf{e})/N_{PS}(\mathbf{e}) \qquad \text{(normalizzato tramite } N_{PS}(\mathbf{e})\text{)}\\ &\approx \mathbf{P}(X,\mathbf{e})/P(\mathbf{e}) \qquad \text{(properietà di } \textsc{PriorSample}\text{)}\\ &= \mathbf{P}(X|\mathbf{e}) \qquad \text{(def. di probabilità condizionale)}\end{aligned}$$

Quindi rejection sampling restituisce stime consistenti della prob. a posteriori

Problemi: costosissimo se $P(\mathbf{e})$ è piccola

La frazione di campioni consistente con $\mathbf{e}$ decade esponenzialmente con il numero di variabili di evidenza!

Likelihood weighting

Idea: fissare le variabili di evidenza, campionare solo variabili non di evidenza, e pesare ogni campione con la likelihood accordata dall'evidenza

function LIKELIHOOD-WEIGHTING(X, $\mathbf{e}$, bn, N) **returns** an estimate of $P(X|\mathbf{e})$
  local variables: $\mathbf{W}$, a vector of weighted counts over X, initially zero

  for $j = 1$ to N **do**
    $\mathbf{x}$, $w \leftarrow$ WEIGHTED-SAMPLE(bn)
    $\mathbf{W}[x] \leftarrow \mathbf{W}[x] + w$ where x is the value of X in $\mathbf{x}$
  return NORMALIZE($\mathbf{W}[X]$)

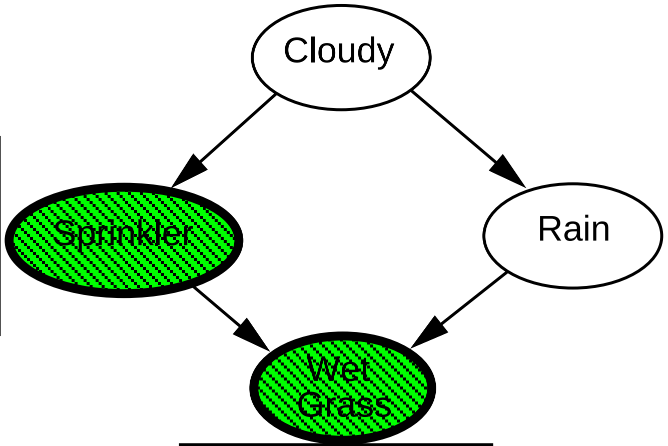
---

function WEIGHTED-SAMPLE(bn, $\mathbf{e}$) **returns** an event and a weight

  $\mathbf{x} \leftarrow$ an event with n elements; $w \leftarrow 1$
  for $i = 1$ **to** n **do**
    if X_i has a value x_i in $\mathbf{e}$
      then $w \leftarrow w \times \ P(X_i = \ x_i \mid Parents(X_i))$
      else $x_i \leftarrow$ a random sample from $\mathbf{P}(X_i \mid Parents(X_i))$
  return $\mathbf{x}$, w

Esempio di likelihood weighting

P(C)
.50



C	P(S|C)
T	.10
F	.50

C	P(R|C)
T	.80
F	.20

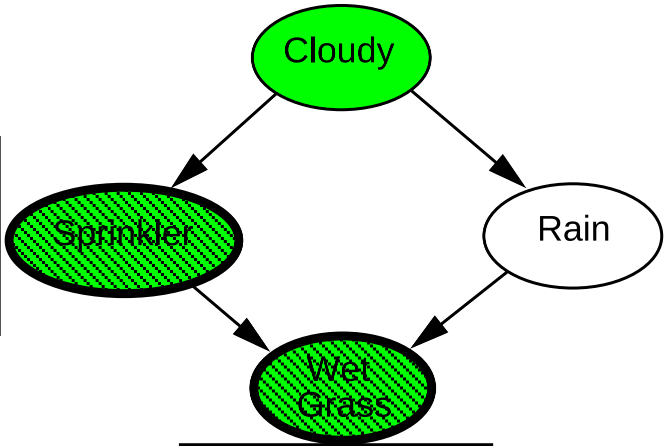
S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

$w = 1.0$

Esempio di likelihood weighting

P(C)
.50

C	P(S|C)
T	.10
F	.50



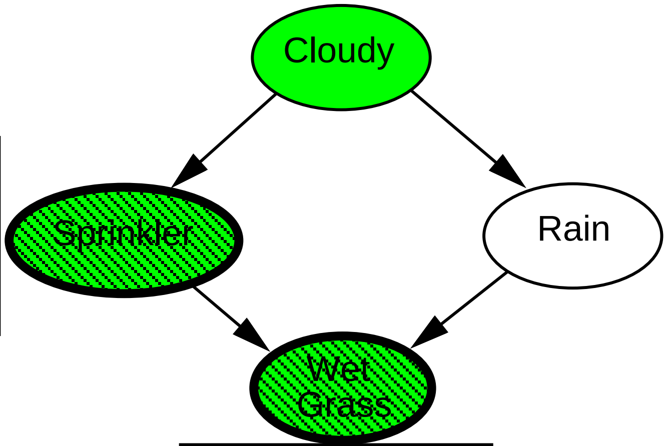
C	P(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

$w = 1.0$

Esempio di likelihood weighting

P(C)
.50



C	P(S|C)
T	.10
F	.50

C	P(R|C)
T	.80
F	.20

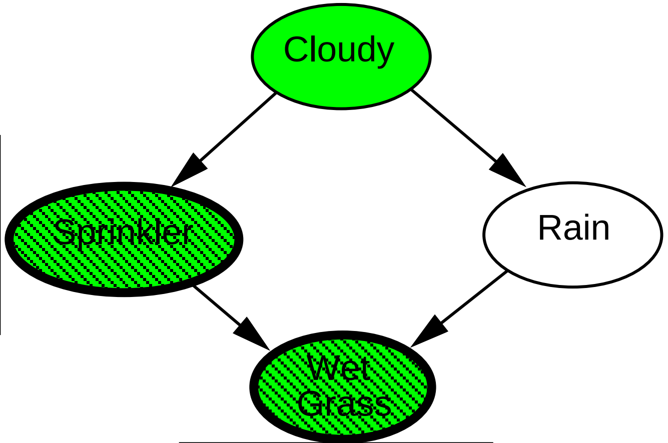
S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

$w = 1.0$

Esempio di likelihood weighting

P(C)
.50

C	P(S|C)
T	.10
F	.50



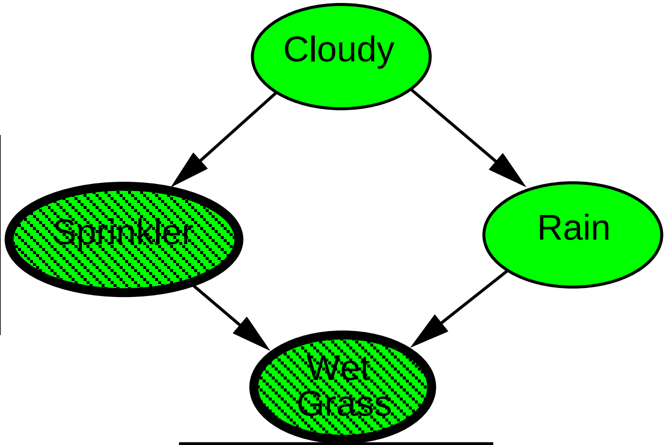
C	P(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

$w = 1.0 \times 0.1$

Esempio di likelihood weighting

P(C)
.50



C	P(S|C)
T	.10
F	.50

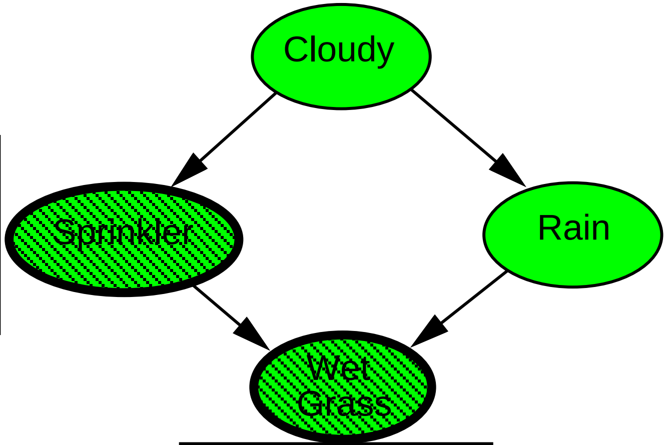
C	P(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

$w = 1.0 \times 0.1$

Esempio di likelihood weighting

P(C)
.50



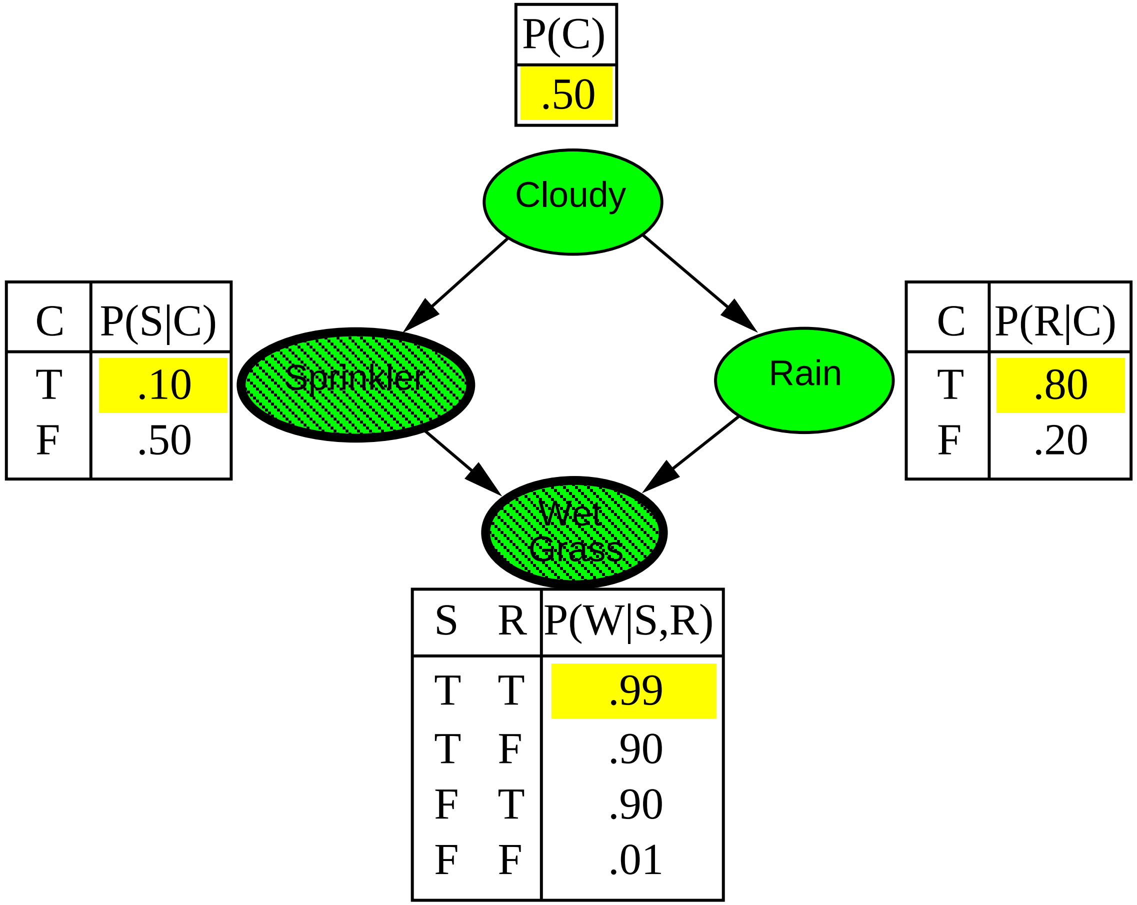
C	P(S|C)
T	.10
F	.50

C	P(R|C)
T	.80
F	.20

S	R	P(W|S,R)
T	T	.99
T	F	.90
F	T	.90
F	F	.01

$w = 1.0 \times 0.1$

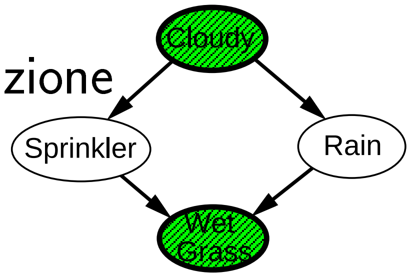
Esempio di likelihood weighting



$w = 1.0 \times 0.1 \times 0.99 = 0.099$

Analisi di likelihood weighting

La probabilità di campionamento per WeightedSample è
$S_{WS}(\mathbf{z},\mathbf{e}) = \prod_{i=1}^{l} P(z_i|Parents(Z_i))$
Nota: pone attenzione solo all'evidenza negli **antenati**
$\Rightarrow$ da qualche parte "nel mezzo" fra la distribuzione a priori e quella a posteriori



Il peso per un dato campione $\mathbf{z},\mathbf{e}$ è
$w(\mathbf{z},\mathbf{e}) = \prod_{i=1}^{m} P(e_i|Parents(E_i))$

La probabilità di campionamento pesata è

$$S_{WS}(\mathbf{z},\mathbf{e})w(\mathbf{z},\mathbf{e})$$
$$= \prod_{i=1}^{l} P(z_i|Parents(Z_i)) \;\; \prod_{i=1}^{m} P(e_i|Parents(E_i))$$
$$= P(\mathbf{z},\mathbf{e})$$ (per la semantica standard globale della rete)

Quindi likelihood weighting restituisce stime consistenti
però le prestazioni degradano con la presenza di tante variabili di evidenza
poiché pochi esempi hanno quasi tutto il peso totale

Inferenza approssimata tramite MCMC

"Stato" della rete = assegnamento corrente a tutte le variabili

Genera lo stato successivo campionando una variabile dato il suo Markov blanket
Campiona ogni variabile a turno, mantenendo l'evidenza fissa

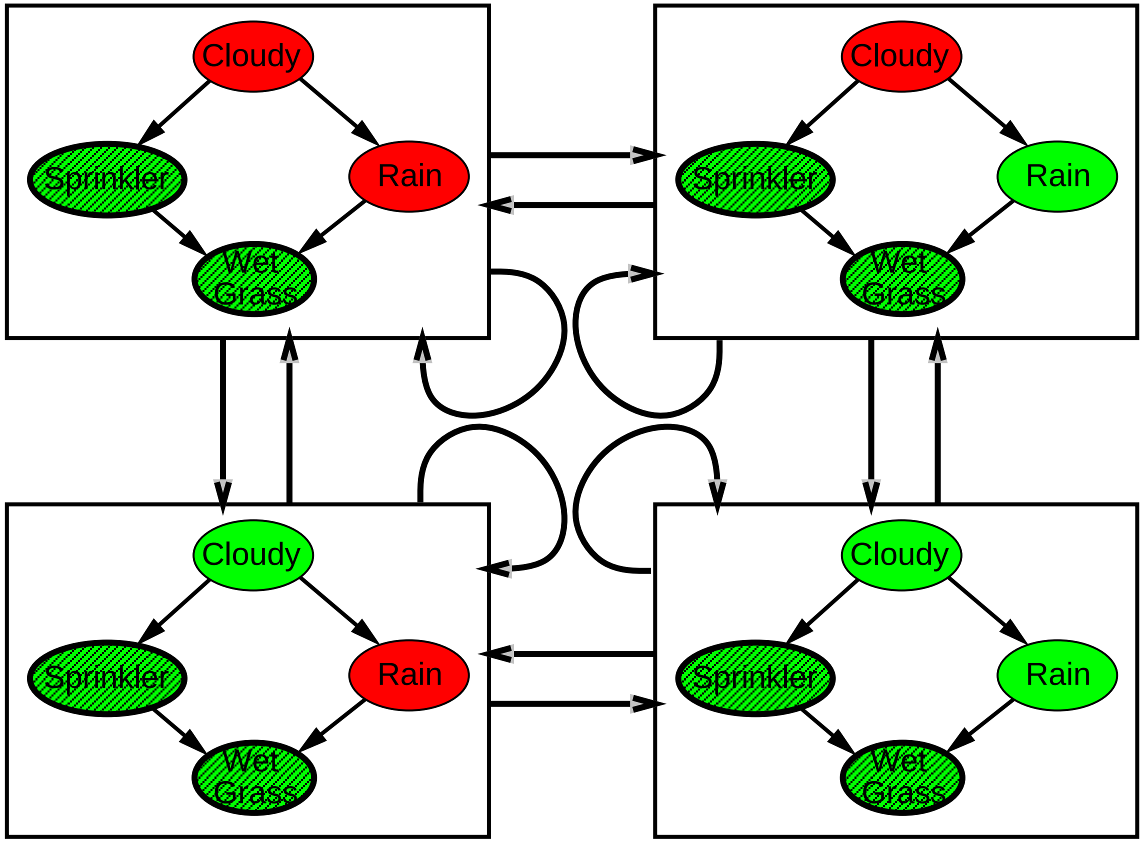
function MCMC-ASK(X, $\mathbf{e}$, bn, N) **returns** an estimate of $P(X|\mathbf{e})$
  local variables: $\mathbf{N}[X]$, a vector of counts over X, initially zero
    $\mathbf{Z}$, the nonevidence variables in bn
    $\mathbf{x}$, the current state of the network, initially copied from $\mathbf{e}$

  initialize $\mathbf{x}$ with random values for the variables in $\mathbf{Y}$
  for $j = 1$ to N **do**
    $\mathbf{N}[x] \leftarrow \mathbf{N}[x] + 1$ where x is the value of X in $\mathbf{x}$
    for each Z_i in $\mathbf{Z}$ **do**
      sample the value of Z_i in $\mathbf{x}$ from $\mathbf{P}(Z_i|MB(Z_i))$ given the values of $MB(Z_i)$ in $\mathbf{x}$
  return NORMALIZE($\mathbf{N}[X]$)

Può anche scegliere una variabile da campionare a caso ogni volta

La catena di Markov (Markov chain)

Con $Sprinkler = true, WetGrass = true$, ci sono quattro stati:



"gironzolare" per un pò, fare la media di quello che si osserva

MCMC: esempio

Stimare $\mathbf{P}(Rain|Sprinkler = true, WetGrass = true)$

Campionare $Cloudy$ o $Rain$ dato il suo Markov blanket, ripetere.
Contare il numero di volte in cui $Rain$ è true e false nei campioni.

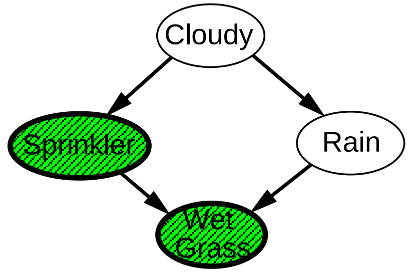
P.e., visita 100 stati
31 hanno $Rain = true$, 69 hanno $Rain = false$

$$\hat{\mathbf{P}}(Rain|Sprinkler = true, WetGrass = true) \\ = \textsc{Normalize}(\langle 31, 69\rangle) = \langle 0.31, 0.69\rangle$$

Teorema: la catena raggiunge la distribuzione stazionaria:
la frazione di tempo speso in ogni stato è esattamente proporzionale alla sua probabilità a posteriori

Markov blanket: campionamento

Il Markov blanket di $Cloudy$ è
    $Sprinkler$ e $Rain$
Il Markov blanket di $Rain$ è
    $Cloudy$, $Sprinkler$, e $WetGrass$



La probabilità dato il Markov blanket è calcolata come segue:

$$P(x'_i|MB(X_i)) = P(x'_i|Parents(X_i)) \prod_{Z_j \in Children(X_i)} P(z_j|Parents(Z_j))$$

Facilmente implementabile in un sistema parallelo a scambio di messaggi

Principali problemi computazionali:

1) Difficoltà a riconoscere se la convergenza è avvenuta
2) Molto costoso se il Markov blanket è grande:
   $P(X_i|MB(X_i))$ non cambierà molto (legge dei grandi numeri)

Analisi di MCMC: passi principali

Probabilità di transizione $q(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}')$

Probabilità di stazionamento $\pi_t(\mathbf{x})$ al tempo t

Condizione di equilibrio su π_t implica distribuzione stazionaria $\pi(\mathbf{x})$

Nota: la distribuzione stazionaria dipende dalla scelta di $q(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}')$

Equilibrio garantito dal detailed balance (condizione di equilibrio) su coppie di stati

Probabilità di transizione calcolata secondo Gibbs sampling:

campiona ogni variabile dati i valori correnti di tutte le altre

$\Rightarrow$ detailed balance con la vera probabilità a posteriori

Per reti Bayesiane, Gibbs sampling si riduce a
campionare condizionatamente alla Markov blanket di ogni variabile

Distribuzione stazionaria

$\pi_t(\mathbf{x})$ = probabilità di trovarsi nello stato $\mathbf{x}$ al tempo t
$\pi_{t+1}(\mathbf{x}')$ = probabilità di trovarsi nello stato $\mathbf{x}'$ al tempo $t+1$

π_{t+1} definibile in termini di π_t e $q(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}')$

$$\pi_{t+1}(\mathbf{x}') = \Sigma_{\mathbf{x}} \pi_t(\mathbf{x}) q(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}')$$

Distribuzione stazionaria: $\pi_t = \pi_{t+1} = \pi$

$$\pi(\mathbf{x}') = \Sigma_{\mathbf{x}} \pi(\mathbf{x}) q(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') \qquad \text{per tutti gli stati } \mathbf{x}'$$

Se π esiste, essa è unica (e specifica per $q(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}')$)

All'equilibrio, "flusso in uscita" aspettato = "flusso in entrata" aspettato

Detailed balance

"flusso in uscita" = "flusso in entrata" per ogni coppia di stati

$$\pi(\mathbf{x})q(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') = \pi(\mathbf{x}')q(\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}) \qquad \text{per tutte le coppie } \mathbf{x},\ \mathbf{x}'$$

Detailed balance $\Rightarrow$ stazionarietà:

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mathbf{x}}\pi(\mathbf{x})q(\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}') &= \Sigma_{\mathbf{x}}\pi(\mathbf{x}')q(\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}) \\ &= \pi(\mathbf{x}')\Sigma_{\mathbf{x}}q(\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}) \\ &= \pi(\mathbf{x}')\end{aligned}$$

L'algoritmo MCMC è costruito in modo che la probabilità di transizione q sia in detailed balance con la probabilità desiderata π

Gibbs sampling

Campiona ogni variabile a turno, date **tutte le altre variabili**

Campionando X_i, denotiamo con $\bar{\mathbf{X}}_i$ tutte le altre variabili non di evidenza
Siano x_i e $\bar{\mathbf{x}}_i$ i valori correnti, e $\mathbf{e}$ l'evidenza fissata
La probabilità di transizione è data da

$$q(\mathbf{x} \to \mathbf{x}') = q(x_i, \bar{\mathbf{x}}_i \to x_i', \bar{\mathbf{x}}_i) = P(x_i' | \bar{\mathbf{x}}_i, \mathbf{e})$$

Questo conduce al detailed balance con la vera probabilità a posteriori $P(\mathbf{x}|\mathbf{e})$:

$$\begin{aligned}
\pi(\mathbf{x}) q(\mathbf{x} \to \mathbf{x}') &= P(\mathbf{x}|\mathbf{e}) P(x_i' | \bar{\mathbf{x}}_i, \mathbf{e}) = P(x_i, \bar{\mathbf{x}}_i | \mathbf{e}) P(x_i' | \bar{\mathbf{x}}_i, \mathbf{e}) \\
&= P(x_i | \bar{\mathbf{x}}_i, \mathbf{e}) P(\bar{\mathbf{x}}_i | \mathbf{e}) P(x_i' | \bar{\mathbf{x}}_i, \mathbf{e}) \quad \text{(chain rule)} \\
&= P(x_i | \bar{\mathbf{x}}_i, \mathbf{e}) P(x_i', \bar{\mathbf{x}}_i | \mathbf{e}) \qquad \text{(chain rule invertita)} \\
&= q(\mathbf{x}' \to \mathbf{x}) \pi(\mathbf{x}') = \pi(\mathbf{x}') q(\mathbf{x}' \to \mathbf{x})
\end{aligned}$$

Riassunto

Inferenza esatta tramite l'eliminazione di variabile:
– polinomiale su polialberi, NP-hard in generale
– spazio = tempo, dipendente dalla topologia

Inferenza approssimata tramite LW e MCMC:
– LW si comporta male quando c'è molta evidenza (soprattutto a "valle")
– LW, MCMC in genere indipendenti dalla topologia
– La convergenza può essere molto lenta per probabilità vicine a 1 o 0
– Possono trattare combinazioni arbitrarie di variabili discrete e continue