Logica del Primo Ordine

Corso di Sistemi Intelligenti, Capitolo 8

Outline

- ♢ Perchè FOL (First-Order Logic) ?
- ♢ Sintassi e Semantica di FOL
- ♢ Esempi di sentenze
- ♢ Il mondo dei Wumpus in FOL

Pro e contro della Logica Proposizionale

😊 La Logica Proposizionale è *dichiarativa*: pezzi di sintassi corrispondono a fatti

😊 La Logica Proposizionale permette di esprimere informazione parziale/disgiuntiva/negata (al contrario di molte strutture dati e basi di dati)

😊 La Logica Proposizionale è *composizionale*:
il significato di $B_{1,1} \wedge P_{1,2}$ è derivato dal significato di $B_{1,1}$ e di $P_{1,2}$

😊 Il significato nella Logica Proposizionale è *indipendente dal contesto*
(al contrario del linguaggio naturale, dove il significato dipende dal contesto)

☹ La Logica Proposizionale ha una potenza espressiva molto limitata
(al contrario del linguaggio naturale)
P.e., non si può dire "le trappole causano la brezza in quadrati adiacenti"
se non scrivendo una sentenza per quadrato

Logica del Primo Ordine (First-order logic)

Mentre la Logica Proposizionale assume che il mondo contenga *fatti*, la Logica del Primo Ordine (come il linguaggio naturale) assume che il mondo contenga

- Oggetti: persone, case, numeri, teorie, Paolino Paperino, colori, partite di calcio, guerre, secoli . . .
- Relazioni: rosso, rotondo, finto, primo . . ., fratello di, più grande di, dentro, parte di, ha colore, occorso dopo, possiede, . . .
- Funzioni: padre di, miglior amico, secondo tempo di, inizio di . . .

Logica in generale

Linguaggio	Scelta Ontologica	Scelta Epistemologica
Logica Proposizionale	fatti	vero/falso/sconosciuto
Logica del Primo Ordine	fatti, oggetti, relazioni	vero/falso/sconosciuto
Logica Temporale	fatti, oggetti, relazioni, tempi	vero/falso/sconosciuto
Teoria delle Probabilità	fatti	gradi di credenza $\in [0, 1]$
Logica Fuzzy	gradi di verità $\in [0, 1]$	intervalli di valore conosciuti

Sintassi di FOL: elementi base

Costanti	$ReGiovanni,\ 2,\ UP, \ldots$
Predicati	$Fratello,\ >, \ldots$
Funzioni	$Sqrt,\ GambaSinistraDi, \ldots$
Variabili	$x,\ y,\ a,\ b, \ldots$
Connettivi	$\land\ \lor\ \neg\ \Rightarrow\ \Leftrightarrow$
Uguaglianza	$=$
Quantificatori	$\forall\ \exists$

Sentenze Atomiche

$$
\begin{aligned}
\text{Sentenza atomica} \;&=\; predicato(termine_1, \ldots, termine_n) \\
&\;\; \text{o } termine_1 = termine_2 \\[1em]
\text{Termine} \;&=\; funzione(termine_1, \ldots, termine_n) \\
&\;\; \text{o } costante \text{ o } variabile
\end{aligned}
$$

P.e., $Fratello(ReGiovanni, RiccardoCuorDiLeone)$
$> (Lung(GambaSinistraDi(Riccardo)), Lung(GambaSinistraDi(ReGiovanni)))$

Sentenze Complesse

Le sentenze complesse sono create da sentenze atomiche usando i connettivi

$$\neg S, \quad S_1 \wedge S_2, \quad S_1 \vee S_2, \quad S_1 \;\Rightarrow\; S_2, \quad S_1 \;\Leftrightarrow\; S_2$$

P.e. $Fratello(ReGiovanni, Riccardo) \;\Rightarrow\; Fratello(Riccardo, ReGiovanni)$
$>(1,2) \vee \leq(1,2)$
$>(1,2) \wedge \neg{>}(1,2)$

Verità nella Logica del Primo Ordine

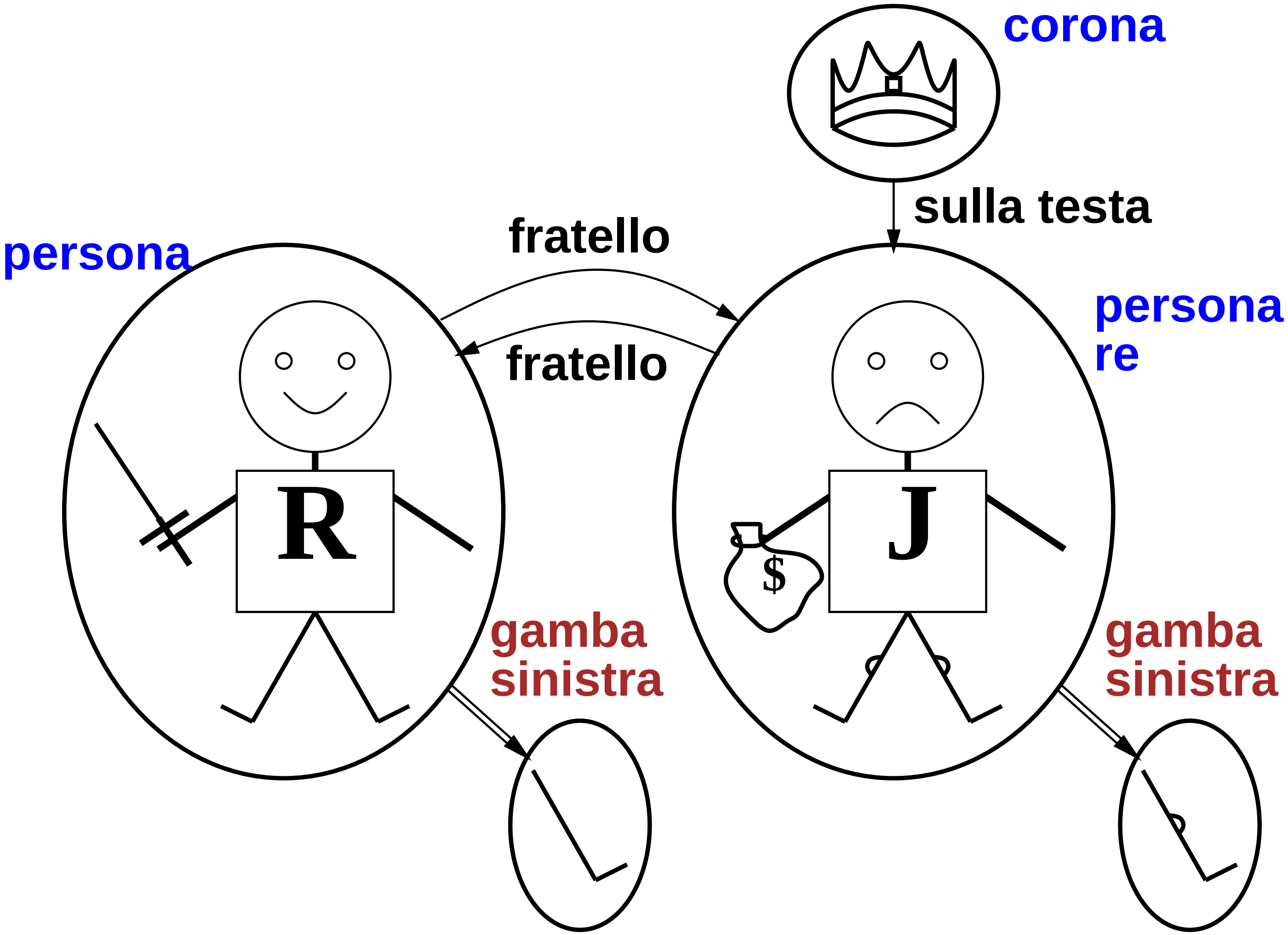
Le sentenze sono vere rispetto ad un modello ed una interpretazione

Il modello contiene ≥ 1 oggetti (elementi di dominio) e relazioni fra loro

L'interpretazione specifica i referenti per
simboli di costanti $\rightarrow$ oggetti
simboli di predicati $\rightarrow$ relazioni
simboli di funzione $\rightarrow$ relazioni funzionali

Una sentenza atomica $predicato(termine_1, \ldots, termine_n)$ è vera
sse gli oggetti riferiti da $termine_1, \ldots, termine_n$
sono nella relazione riferita dal $predicato$

Modelli per FOL: Esempio



Modelli per FOL: Tanti!

Si *possono* enumerare i modelli per il vocabolario di una data KB:

Per ogni numero di elementi di dominio n, da 1 a ∞
    Per ogni predicato k-ario P_k nel vocabolario
        Per ogni possibile relazione k-aria su n oggetti
            Per ogni simbolo di costante C nel vocabolario
                Per ogni scelta di referente per C da n oggetti . . .

Calcolare le conseguenze logiche enumerando i modelli non è facile!

Quantificatori Universali

$\forall \langle variabili \rangle \;\; \langle sentenza \rangle$

Chiunque a Padova è intelligente:
$\forall x \;\; Luogo(x, Padova) \;\Rightarrow\; Intelligente(x)$

$\forall x \;\; P$ è vero in un modello m sse P è vero essendo x ogni possibile oggetto nel modello

In prima approssimazione, equivalente alla congiunzione di istanziazioni di P

$$\begin{array}{ll} & Luogo(ReGiovanni, Padova) \;\Rightarrow\; Intelligente(ReGiovanni) \\ \wedge & Luogo(Riccardo, Padova) \;\Rightarrow\; Intelligente(Riccardo) \\ \wedge & Luogo(Padova, Padova) \;\Rightarrow\; Intelligente(Padova) \\ \wedge & \ldots \end{array}$$

Uno sbaglio comune da evitare

Tipicamente, $\Rightarrow$ è il connettivo principale usato con $\forall$

Sbaglio comune: uso di $\wedge$ come connettivo principale con $\forall$:

$$\forall\, x \;\; Luogo(x, Padova) \wedge Intelligente(x)$$

significa "Chiunque è a Padova e chiunque è intelligente"

Quantificatore esistenziale

$\exists \langle variabili \rangle \;\; \langle sentenza \rangle$

Qualcuno a Bologna è intelligente:
$\exists\, x \;\; Luogo(x, Bologna) \land Intelligente(x)$

$\exists\, x \;\; P$ è vero in un modello m sse P è vero essendo x *qualche* possibile oggetto nel modello

In prima approssimazione, equivalente alla disgiunzione di istanziazioni di P

$$
\begin{aligned}
& Luogo(ReGiovanni, Bologna) \land Intelligente(ReGiovanni) \\
\lor\; & Luogo(Richard, Bologna) \land Intelligente(Richard) \\
\lor\; & Luogo(Bologna, Bologna) \land Intelligente(Bologna) \\
\lor\; & \ldots
\end{aligned}
$$

Un altro sbaglio comune da evitare

Tipicamente, $\wedge$ è il connettivo principale usato con $\exists$

Sbaglio comune: uso di $\Rightarrow$ come connettivo principale con $\exists$:

$$\exists\, x \;\; Luogo(x, Bologna) \;\Rightarrow\; Intelligente(x)$$

è vero se c'è qualcuno che non è a Bologna!

Proprietà dei quantificatori

$\forall x \;\; \forall y$ è lo stesso di $\forall y \;\; \forall x$ (Perchè??)

$\exists x \;\; \exists y$ è lo stesso di $\exists y \;\; \exists x$ (Perchè??)

$\exists x \;\; \forall y$ non è lo stesso di $\forall y \;\; \exists x$

$\exists x \;\; \forall y \;\; Ama(x, y)$
"C'è una persona che ama chiunque nel mondo"

$\forall y \;\; \exists x \;\; Ama(x, y)$
"Ognuno nel mondo è amato da almeno una persona"

Dualità dei quantificatori: ognuno può essere espresso usando l'altro

$\forall x \;\; Piace(x, gelato) \qquad \neg\exists x \;\; \neg Piace(x, gelato)$

$\exists x \;\; Piace(x, broccoli) \qquad \neg\forall x \;\; \neg Piace(x, broccoli)$