PARTE 3:

Nozioni di Apprendimento Automatico

Riferimento Bibliografico: *Tom Mitchell, Machine Learning, McGraw Hill, 1997*

Ingredienti Fondamentali

- Dati di Allenamento (estratti dallo Spazio delle Istanze, X)
- Spazio delle Ipotesi, $\mathcal{H}$
  - costituisce l'insieme delle funzioni che possono essere realizzate dal sistema di apprendimento;
  - si assume che la funzione da apprendere f possa essere rappresentata da una ipotesi $h \in \mathcal{H}$... (selezione di h attraverso i dati di apprendimento)
  - o che almeno una ipotesi $h \in \mathcal{H}$ sia simile a f (approssimazione);
- Algoritmo di Ricerca nello Spazio delle Ipotesi, alg. di apprendimento

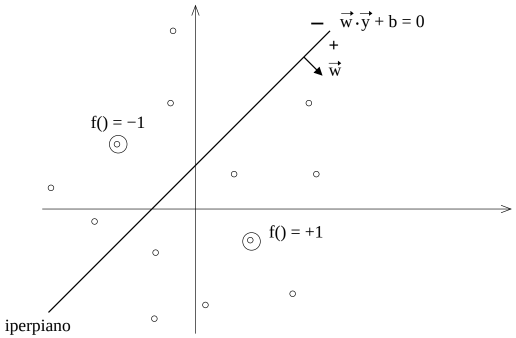
ATTENZIONE: $\mathcal{H}$ non può coincidere con l'insieme di tutte le funzioni possibili e la ricerca essere esaustiva $\longrightarrow$ Apprendimento è inutile!!!

Si parla di **Bias Induttivo**: sulla rappresentazione ($\mathcal{H}$) e/o sulla ricerca (alg. di apprendimento)

Spazio delle Ipotesi: Esempio 1

Iperpiani in $\mathbb{R}^2$

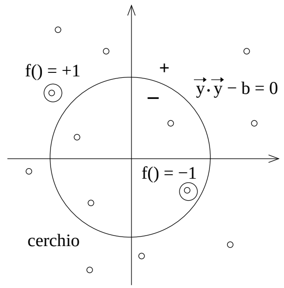
- Spazio delle Istanze $\longrightarrow$ punti nel piano: $X = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2\}$
- Spazio delle Ipotesi $\longrightarrow$ dicotomie indotte da iperpiani in $\mathbb{R}^2$:
  $\mathcal{H} = \{f_{(\vec{w},b)}(\vec{y}) | f_{(\vec{w},b)}(\vec{y}) = sign(\vec{w} \cdot \vec{y} + b), \vec{w} \in \mathbb{R}^2, b \in \mathbb{R}\}$



Spazio delle Ipotesi: Esempio 2

Dischi in $\mathbb{R}^2$

- Spazio delle Istanze $\longrightarrow$ punti nel piano: $X = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2\}$
- Spazio delle Ipotesi $\longrightarrow$ dicotomie indotte da dischi in $\mathbb{R}^2$ centrati nell'origine:
  $\mathcal{H} = \{f_b(\vec{y}) | f_b(\vec{y}) = sign(\vec{y} \cdot \vec{y} - b), b \in \mathbb{R}\}$



Spazio delle Ipotesi: Esempio 3

Congiunzione di m letterali positivi

- Spazio delle Istanze $\rightarrow$ stringhe di m bit: $X = \{s | s \in \{0, 1\}^m\}$
- Spazio delle Ipotesi $\rightarrow$ tutte le sentenze logiche che riguardano i letterali positivi $l_1, \ldots, l_m$ (l_1 è vero se il primo bit vale 1, l_2 è vero se il secondo bit vale 1, etc.) e che contengono solo l'operatore $\wedge$ (**and**):

$$\mathcal{H} = \{f_{\{i_1,\ldots,i_j\}}(s) | f_{\{i_1,\ldots,i_j\}}(s) \equiv l_{i_1} \wedge l_{i_2} \wedge \cdots \wedge l_{i_j}, \{i_1, \ldots, i_j\} \subseteq \{1, \ldots, m\}\}$$

Es. $m = 3$, $X = \{0, 1\}^3$
Esempi di istanze $\rightarrow$ $s1 = 101$, $s2 = 001$, $s3 = 100$, $s4 = 111$
Esempi di ipotesi $\rightarrow$ $h_1 \equiv l_2$, $h_2 \equiv l_1 \wedge l_2$, $h_3 \equiv true$, $h_4 \equiv l_1 \wedge l_3$, $h_5 \equiv l_1 \wedge l_2 \wedge l_3$
Notare che: h_1, h_2, e h_5 sono false per $s1$, $s2$ e $s3$ e vere per $s4$; h_3 è vera per ogni istanza; h_4 è vera per $s1$ e $s4$ ma falsa per $s2$ e $s3$

Spazio delle Ipotesi: Esempio 3

Congiunzione di m letterali positivi

- Domanda 1: quante e quali sono le ipotesi distinte nel caso $m = 3$?
- Domanda 2: quante sono le ipotesi distinte nel caso generale m ?

Spazio delle Ipotesi: Esempio 3

Congiunzione di m letterali positivi

- Domanda 1: quante e quali sono le ipotesi distinte nel caso $m = 3$?
  - Ris.(quali): $true$, l_1, l_2, l_3, $l_1 \wedge l_2$, $l_1 \wedge l_3$, $l_2 \wedge l_3$, $l_1 \wedge l_2 \wedge l_3$
  - Ris.(quante): 8
- Domanda 2: quante sono le ipotesi distinte nel caso generale m ?

Spazio delle Ipotesi: Esempio 3

Congiunzione di m letterali positivi

- Domanda 1: quante e quali sono le ipotesi distinte nel caso $m = 3$?
  - Ris.(quali): $true$, l_1, l_2, l_3, $l_1 \wedge l_2$, $l_1 \wedge l_3$, $l_2 \wedge l_3$, $l_1 \wedge l_2 \wedge l_3$
  - Ris.(quante): 8
- Domanda 2: quante sono le ipotesi distinte nel caso generale m ?
  - Ris.: 2^m, infatti per ogni possibile bit della stringa in ingresso il corrispondente letterale può apparire o meno nella formula logica, quindi:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{m \text{ volte}} = 2^m$$

Spazio delle Ipotesi: Esempio 4

Congiunzione di m letterali

- Spazio delle Istanze $\longrightarrow$ stringhe di m bit: $X = \{s | s \in \{0,1\}^m\}$
- Spazio delle Ipotesi $\longrightarrow$ tutte le sentenze logiche che riguardano i letterali $l_1, \ldots, l_m$ (anche in forma negata, $\neg l_i$) e che contengono solo l'operatore $\wedge$ (**and**):

$$\mathcal{H} = \{f_{\{i_1,\ldots,i_j\}}(s) | f_{\{i_1,\ldots,i_j\}}(s) \equiv L_{i_1} \wedge L_{i_2} \wedge \cdots \wedge L_{i_j},\ \text{dove } L_{i_k} = l_{i_k} \text{ oppure } \neg l_{i_k}, \{i_1, \ldots, i_j\} \subseteq \{1, \ldots, 2m\}\}$$

Notare che se in una formula un letterale compare sia affermato che negato, allora la formula ha sempre valore di verità $false$ (formula non soddisfacibile)

Quindi, tutte le formule che contengono almeno un letterale sia affermato che negato sono equivalenti alla funzione che vale sempre $false$

Spazio delle Ipotesi: Esempio 4

Congiunzione di m letterali

Es. $m = 3$, $X = \{0,1\}^3$

Esempi di istanze $\longrightarrow$ $s1 = 101$, $s2 = 001$, $s3 = 100$, $s4 = 111$, $s5 = 000$

Esempi di ipotesi $\longrightarrow$ $h_1 \equiv \neg l_2$, $h_2 \equiv \neg l_1 \wedge l_3$, $h_3 \equiv true$, $h_4 \equiv \neg l_1 \wedge \neg l_2 \wedge \neg l_3$

Notare che:

- h_1, è falsa per $s4$, e vera per $s1$, $s2$, $s3$ e $s5$;
- h_2 è falsa per $s1$, $s3$, $s4$ e $s5$ e vera per $s2$;
- h_3 è vera per ogni istanza;
- h_4 è falsa per $s1$, $s2$, $s3$, $s4$ e vera per $s5$;

Domanda: quante sono le ipotesi distinte nel caso generale m ?

Spazio delle Ipotesi: Esempio 4

Congiunzione di m letterali

Domanda: quante sono le ipotesi distinte nel caso generale m ?

Risposta: considerando che tutte le formule non soddisfacibili sono equivalenti alla funzione sempre falsa, allora non consideriamo formule dove compare un letterale sia affermato che negato.

Quindi, per ogni possibile bit della stringa in ingresso il corrispondente letterale può non apparire nella formula logica o, se appare, è affermato o negato:

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3}_{m \text{ volte}} = 3^m$$

E considerando la funzione sempre falsa si ha $3^m + 1$

Spazio delle Ipotesi: Esempio 5

Lookup Table

- Spazio delle Istanze $\longrightarrow$ stringhe di m bit: $X = \{s | s \in \{0,1\}^m\}$
- Spazio delle Ipotesi $\longrightarrow$ tutte le possibili tabelle di verità che mappano istanze di ingresso ai valori $true$ e $false$: $\mathcal{H} = \{f(s) | f : X \rightarrow \{true, false\}\}$

Es.

l_1	l_2	$\cdots$	l_m	$f(s)$
0	0	$\cdots$	0	1
0	0	$\cdots$	1	0
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
0	1	$\cdots$	0	0
0	1	$\cdots$	1	1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
1	0	$\cdots$	0	1
1	0	$\cdots$	1	1
1	1	$\cdots$	0	0
1	1	$\cdots$	1	1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Spazio delle Ipotesi: Esempio 5

Congiunzione di m letterali

Domanda: quante sono le ipotesi distinte nel caso generale m ?

Spazio delle Ipotesi: Esempio 5

Congiunzione di m letterali

Domanda: quante sono le ipotesi distinte nel caso generale m ?

Risposta: tramite una tabella è possibile realizzare una qualunque funzione dallo spazio delle istanze nei volori $true$ e $false$.

Il numero di possibili istanze è:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{m \text{ volte}} = 2^m$$

e quindi il numero di possibili funzioni realizzabili è: 2^{2^m}

Osservazioni su Esempi 3, 4 e 5

Osservare che negli esempi 3, 4 e 5 lo spazio delle istanze è sempre lo stesso.

Gli spazi delle ipotesi invece (indichiamo con $\mathcal{H}_3$ quello relativo all'esempio 3, etc.) sono diversi e per ogni m fissato vale la seguente relazione: $\boxed{\mathcal{H}_3 \subset \mathcal{H}_4 \subset \mathcal{H}_5}$

Per esempio, dato $m = 3$

- la funzione booleana $f(s)$ che vale vero solo per le istanze 001 e 011 è contenuta in $\mathcal{H}_4$, infatti $f(s) \equiv \neg l_1 \wedge l_3 \in \mathcal{H}_4$, e in $\mathcal{H}_5$(è facile scrivere una tabella per cui la colonna relativa all'output della funzione è 1 solo in corrispondenza delle istanze 001 e 011), ma non in $\mathcal{H}_3$ perché non esiste la possibilità di descrivere $f(s)$ usando una congiunzione di letterali positivi.
- la funzione booleana $f(s)$ che vale vero solo per le istanze 001, 011 e 100 è contenuta in $\mathcal{H}_5$ (si può procedere come sopra), ma non in $\mathcal{H}_3$ e $\mathcal{H}_4$, perché non esiste la possibilità di descrivere $f(s)$ usando una congiunzione di letterali (positivi).

In particolare $\mathcal{H}_5$ coincide con l'insieme di tutte le funzioni booleane su X.

Alcune definizioni per l'apprendimento di concetti

Definizione: Un "concetto" su uno spazio delle istanze X è definito come una funzione booleana su X.

Definizione: Un esempio di un concetto c su uno spazio delle istanze X è definito come una coppia $(x, c(x))$, dove $x \in X$ e si ricorda che $c()$ è una funzione booleana.

Definizione: Sia h una funzione booleana definita su uno spazio delle istanze X. Si dice che h soddisfa $x \in X$ se $h(x) = 1$ ($true$).

Definizione: Sia h una funzione booleana definita su uno spazio delle istanze X ed $(x, c(x))$ un esempio di $c()$. Si dice che h è consistente con l'esempio se $h(x) = c(x)$. Inoltre si dice che h è consistente con un insieme di esempi Tr se h è consistente con ogni esempio in Tr.

Ordinamento parziale sulle ipotesi

Definizione: Siano h_i e h_j funzioni booleane definite su uno spazio delle istanze X. Si dice che h_i è più generale o equivalente di h_j (scritto $h_i \geq_g h_j$) se e solo se

$$(\forall x \in X)[(h_j(x) = 1) \rightarrow (h_i(x) = 1)]$$

Esempi

- $l_1 \geq_g (l_1 \wedge l_2)$
- $l_2 \geq_g (l_1 \wedge l_2)$
- $l_1 \not\geq_g l_2$ e $l_2 \not\geq_g l_1$ (non paragonabili)

Esercizio: apprendimento di congiunzioni di letterali

Algoritmo **Find-S**

/* trova l'ipotesi più specifica consistente con l'insieme di apprendimento */

- input: insieme di apprendimento Tr
- inizializza l'ipotesi corrente h alla ipotesi più specifica $h \equiv l_1 \wedge \neg l_1 \wedge l_2 \wedge \neg l_2 \wedge \cdots \wedge l_m \wedge \neg l_m$
- per ogni istanza positiva di apprendimento $(x, true) \in Tr$
  - rimuovi da h ogni letterale (affermato o negato) che non è soddisfatto da x
- restituisci h

Esempio di applicazione: $m = 5$

Esempio (positivo)	ipotesi corrente
	$h_0 \equiv l_1 \wedge \neg l_1 \wedge l_2 \wedge \neg l_2 \wedge l_3 \wedge \neg l_3 \wedge l_4 \wedge \neg l_4 \wedge l_5 \wedge \neg l_5$
1 1 0 1 0	$h_1 \equiv l_1 \wedge l_2 \wedge \neg l_3 \wedge l_4 \wedge \neg l_5$
1 0 0 1 0	$h_2 \equiv l_1 \wedge \neg l_3 \wedge l_4 \wedge \neg l_5$
1 0 1 1 0	$h_3 \equiv l_1 \wedge l_4 \wedge \neg l_5$
1 0 1 0 0	$h_4 \equiv l_1 \wedge \neg l_5$
0 0 1 0 0	$h_5 \equiv \neg l_5$

Notare che $\boxed{h_0 \leq_g h_1 \leq_g h_2 \leq_g h_3 \leq_g h_4 \leq_g h_5}$

Inoltre, ad ogni passo si sostituisce h_i con un' ipotesi h_{i+1} che costituisce una *generalizzazione minima* di h_i consistente con l'esempio corrente.

Quindi **Find-S** restituisce l'ipotesi più specifica consistente con Tr

Osservazioni su **Find-S**

Find-S è in effetti uno schema di algoritmo che si può applicare a spazi di istanze e ipotesi diversi da quelli visti.

L'idea base dell'algoritmo è quella di effettuare una *generalizzazione minima* dell'ipotesi corrente quando questa non è più consistente con l'esempio corrente.

Notare che ogni volta che l'ipotesi corrente h viene *generalizzata* ad una nuova ipotesi h' ($h' \geq_g h$), tutti gli esempi positivi visti in precedenza continuano ad essere soddisfatti dalla nuova ipotesi h' (infatti, poiché $h' \geq_g h$, si ha che $\forall x \in X,\ (h(x) = 1) \rightarrow (h'(x) = 1)$)

Infine, se il concetto da apprendere è contenuto in $\mathcal{H}$, tutti gli eventuali esempi negativi sono soddisfatti automaticamente dalla ipotesi restituita da **Find-S** in quanto questa è l'ipotesi consistente più specifica, cioè quella che attribuisce il minor numero possibile di 1 alle istanze in X.

Esiste un motivo per preferire l'ipotesi consistente più specifica ?