# Apprendimento con Rinforzo

- Sono dati:
  - agente (intelligente ?), che può
    - trovarsi in uno stato $s$, ed
    - eseguire una azione $a$ (all'interno delle azioni possibili nello stato corrente)
  - ed opera in un ambiente $e$, che applicando una azione $a$ nello stato $s$ restituisce
    - lo stato successivo, e
    - una ricompensa $r$, che può essere positiva (+), negativa (-), o neutra (0).
- Scopo dell'agente è quello di massimizzare una funzione delle ricompense (es. ricompensa scontata: $\sum_{t=0}^{\infty} \gamma^t r_{t+1}$ dove $0 \leq \gamma < 1$)

Esempio di applicazione: sistema che imparare a giocare a dama

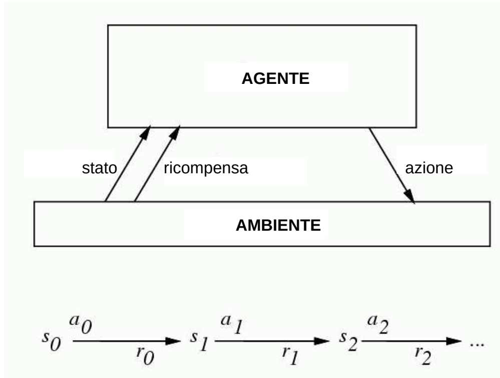
Esempio di applicazione: modulo di navigazione per un robot in un ambiente sconosciuto

Esempio di applicazione: navigare sul Web alla ricerca di informazione focalizzata





# Agente/Ambiente




Goal: apprendere le azioni che massimizzano

$r_0 + \gamma r_1 + \gamma^2 r_2 + \ldots$ , dove $0 \leq \gamma < 1$





# Processi di Decisione di Markov

Si assume

- insieme finito di stati $S$
- insieme di azioni $A$
- ad ogni istante di tempo $t$ l'agente osserva lo stato $s_t \in S$ e sceglie l'azione $a_t \in A$
- poi riceve la ricompensa immediata $r_t$
- e cambia lo stato in $s_{t+1}$
- assunzione di Markov: $s_{t+1} = \delta(s_t, a_t)$ e $r_t = r(s_t, a_t)$
  - cioe', $r_t$ e $s_{t+1}$ dipendono SOLO dallo stato ed azione *correnti*
  - le funzioni $\delta$ e $r$ possono essere DETERMINISTICHE o NONDETERMINISTICHE
  - le funzioni $\delta$ e $r$ possono essere CONOSCIUTE o IGNOTE





# Compito di Apprendimento per l'Agente

Eseguire azioni nell'Ambiente, osservare i risultati e

- apprendere la politica (per le azioni) $\pi : S \rightarrow A$ che massimizza (nel caso più generale)

$$E[r_t + \gamma r_{t+1} + \gamma^2 r_{t+2} + \ldots]$$

  per ogni stato iniziale in $S$

- $0 \leq \gamma < 1$ è il *fattore di sconto* per ricompense future

Novità:

- la funzione target è $\boxed{\pi : S \rightarrow A}$
- ma non si hanno a disposizione esempi nella forma $(s, a)$
- gli esempi di apprendimento sono nella forma $((s, a), r)$

## La Funzione di Valutazione

Consideriamo il CASO DETERMINISTICO:

- per ogni possibile politica $\pi$ che l'agente può adottare, possiamo definire una funzione di valutazione sugli stati

$$
\begin{aligned}
V^{\pi}(s) &\equiv r_t + \gamma r_{t+1} + \gamma^2 r_{t+2} + \ldots \\
&\equiv \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i r_{t+i}
\end{aligned}
$$

  dove $r_t, r_{t+1}, \ldots$ sono generati seguendo la politica $\pi$ a partire dallo stato $s$

- riformulato, il compito consiste nell'apprendere la politica ottima $\pi^*$

$$\boxed{\pi^* \equiv arg\max_{\pi} V^{\pi}(s), (\forall s)}$$





## Cosa Apprendere ?

Possiamo tentare di far apprendere all'agente la funzione di valutazione $V^{\pi^*}$ (riferita nel seguito semplicemente con $V^*$)

L'agente potrebbe effettuare una ricerca in avanti per scegliere la migliore azione a partire da ogni stato $s$ perché

$$\pi^*(s) = arg\max_a [r(s,a) + \gamma V^*(\delta(s,a))]$$

Problema:

- Funziona solo se l'agente conosce $\delta : S \times A \rightarrow S$, e $r : S \times A \rightarrow \Re$
- ... ma se l'agente non ha questa conoscenza (come succede in molte applicazioni del mondo reale) non si può procedere in questo modo...





## La Funzione $Q()$

Soluzione:

- definire una nuova funzione molto simile a $V^*$

$$\boxed{Q(s,a) \equiv r(s,a) + \gamma V^*(\delta(s,a))}$$

- se l'agente apprende $Q$, esso può scegliere l'azione ottima anche senza conoscere $\delta$!

$$\pi^*(s) = arg\max_a [r(s,a) + \gamma V^*(\delta(s,a))]$$

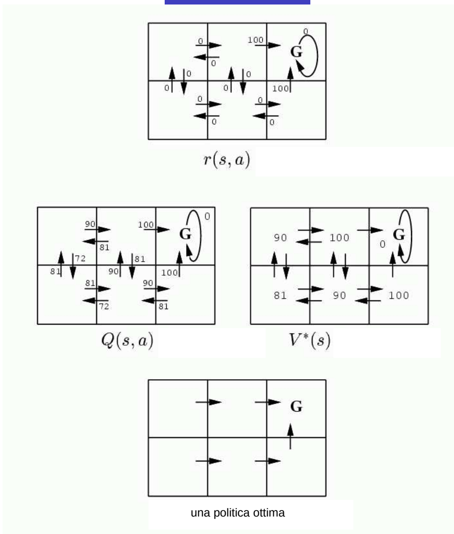
$$\pi^*(s) = arg\max_a Q(s,a)$$

Quindi, $Q$ è la funzione di valutazione che l'agente deve apprendere





## Esempio



## Come Apprendere $Q()$ ?

Notare che $Q$ e $V^*$ sono intimamente correlate:

$$V^*(s) = \max_{a'} Q(s,a')$$

Ciò permette di scrivere $Q$ RICORSIVAMENTE come

$$\begin{aligned} Q(s_t,a_t) &= r(s_t,a_t) + \gamma V^*(\delta(s_t,a_t)) \\ &= r(s_t,a_t) + \gamma \max_{a'} Q(s_{t+1},a') \end{aligned}$$

Bene! Poniamo $\hat{Q}$ essere la funzione corrente appresa dall'agente che approssima $Q$.

Consideriamo la seguente regola di apprendimento:

$$\boxed{\hat{Q}(s,a) \leftarrow r + \gamma \max_{a'} \hat{Q}(s',a')}$$

dove $s'$ è lo stato risultante dalla applicazione della azione $a$ allo stato $s$





## Algoritmo $Q - Learning$

1. per ogni $s, a$ inizializza la entry della tabella $\hat{Q}(s,a) \leftarrow 0$
2. osserva lo stato corrente $s$
3. esegui per sempre
   (a) seleziona una azione $a$ ed eseguila
   (b) ricevi la ricompensa immediata $r$
   (c) osserva il nuovo stato $s'$
   (d) aggiorna la entry $\hat{Q}(s,a)$ come segue:
   $$\hat{Q}(s,a) \leftarrow r + \gamma \max_{a'} \hat{Q}(s',a')$$
   (e) $s \leftarrow s'$





## Algoritmo $Q - Learning$

1. per ogni $s, a$ inizializza la entry della tabella $\hat{Q}(s,a) \leftarrow 0$
2. osserva lo stato corrente $s$
3. esegui per sempre
   (a) seleziona una azione $a$ ed eseguila    come selezionarla ?
   (b) ricevi la ricompensa immediata $r$
   (c) osserva il nuovo stato $s'$
   (d) aggiorna la entry $\hat{Q}(s,a)$ come segue:
   $$\hat{Q}(s,a) \leftarrow r + \gamma \max_{a'} \hat{Q}(s',a')$$
   (e) $s \leftarrow s'$



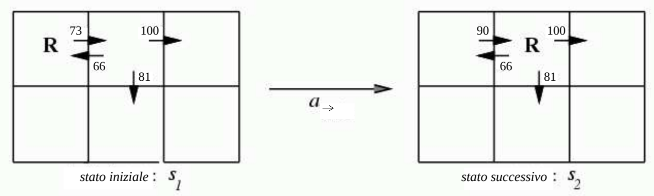


## Algoritmo $Q - Learning$

1. per ogni $s, a$ inizializza la entry della tabella $\hat{Q}(s,a) \leftarrow 0$
2. osserva lo stato corrente $s$
3. esegui per sempre
   (a) seleziona una azione $a$ ...    strategia
   - $\nearrow$ random (esplorazione)
   - $\searrow$ $arg \max_a \hat{Q}(s,a)$ (sfruttamento)

   (b) ricevi la ricompensa immediata $r$
   (c) osserva il nuovo stato $s'$
   (d) aggiorna la entry $\hat{Q}(s,a)$ come segue:
   $$\hat{Q}(s,a) \leftarrow r + \gamma \max_{a'} \hat{Q}(s',a')$$
   (e) $s \leftarrow s'$

# Esempio di Applicazione




$$
\begin{aligned}
\hat{Q}(s_1, a_{\rightarrow}) & \leftarrow r + \gamma \max_{a'} \hat{Q}(s_2, a') \\
& \leftarrow 0 + 0.9 \max\{66, 81, 100\} \\
& \leftarrow 90
\end{aligned}
$$

notare che se le ricompense sono non-negative, allora

$$(\forall s, a, n) \ \hat{Q}_{n+1}(s, a) \geq \hat{Q}_n(s, a)$$

e

$$(\forall s, a, n) \ 0 \leq \hat{Q}_n(s, a) \leq Q(s, a)$$





# Convergenza

$\hat{Q}$ converge a $Q$

Consideriamo il caso deterministico dove ogni $\langle s, a \rangle$ è visitato un numero infinito di volte

*Prova*: Definiamo un intervallo pieno un intervallo durante il quale ogni $\langle s, a \rangle$ è visitato. Durante ogni intervallo pieno l'errore più grande nella tabella $\hat{Q}$ è ridotto di un fattore $\gamma$

Infatti, sia $\hat{Q}_n$ la tabella dopo $n$ aggiornamenti, e $\Delta_n$ l'errore massimo in $\hat{Q}_n$, cioè

$$\Delta_n = \max_{s,a} |\hat{Q}_n(s, a) - Q(s, a)|$$

Per ogni entry della tabella $\hat{Q}_n\langle s, a \rangle$ aggiornata alla iterazione $n + 1$, l'errore nella stima rivista $\hat{Q}_{n+1}\langle s, a \rangle$ è





$$
\begin{aligned}
|\hat{Q}_{n+1}(s, a) - Q(s, a)| & = |(r + \gamma \max_{a'} \hat{Q}_n(s', a')) \\
& \quad -(r + \gamma \max_{a'} Q(s', a'))| \\
& = \gamma |\max_{a'} \hat{Q}_n(s', a') - \max_{a'} Q(s', a')| \\
& \leq \gamma \max_{a'} |\hat{Q}_n(s', a') - Q(s', a')| \\
& \leq \gamma \max_{s'', a'} |\hat{Q}_n(s'', a') - Q(s'', a')| \\
|\hat{Q}_{n+1}(s, a) - Q(s, a)| & \leq \gamma \Delta_n
\end{aligned}
$$

Notare che abbiamo usato il risultato generale

$$|\max_a f_1(a) - \max_a f_2(a)| \leq \max_a |f_1(a) - f_2(a)|$$





# Caso NONDETERMINISTICO

Si ridefiniscono $V, Q$ considerando i valori aspettati

$$
\begin{aligned}
V^{\pi}(s) & \equiv E[r_t + \gamma r_{t+1} + \gamma^2 r_{t+2} + \ldots] \\
& \equiv E[\sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i r_{t+i}]
\end{aligned}
$$

$$Q(s, a) \equiv E[r(s, a) + \gamma V^*(\delta(s, a))]$$

Per l'apprendimento, sostituire la regola di aggiornamento con

$$\hat{Q}_n(s, a) \leftarrow (1 - \alpha_n)\hat{Q}_{n-1}(s, a) + \alpha_n[r + \max_{a'} \hat{Q}_{n-1}(s', a')] \text{ dove } \alpha_n = \frac{1}{1 + visite_n(s, a)}$$

Sotto determinate condizioni si dimostra la convergenza