

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
Laurea in Ingegneria Civile e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, – prof. A. Tonolo

Prova scritta di **MATEMATICA 2** (1° compitino)

Padova, 12 ottobre 2002

TEMA 1

A1	A2	A3	A4	B

Tempo a disposizione: 120'. Gli esercizi vanno svolti con le dovute giustificazioni sul foglio di bella. Il testo (il presente foglio) va consegnato insieme al foglio di bella. Non si possono usare calcolatrici, appunti, libri, telefoni.

Parte A (8 punti) Sia $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(A1) Si determini la decomposizione LU della matrice A .

(A2) Trovare la soluzione generale del sistema che ha A come matrice completa e le soluzioni base del sistema omogeneo associato.

(A3) Si calcoli l'inversa della matrice $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(A4) Si calcoli il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} -1 & 8 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 8 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Parte B (4 punti) Sia A la matrice completa di un sistema lineare. Supponiamo che A abbia dimensione $n \times m$ e $\text{rank } A = n$. È vero che il sistema lineare in questione è risolubile? È vero che necessariamente $n \leq m$? Per ciascuna domanda, produrre una dimostrazione (in caso di risposta affermativa) o un controesempio (in caso di risposta negativa).

Soluzioni Parte A.

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La soluzione generale è

$$\begin{bmatrix} -2s & s & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T + s \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Il sistema omogeneo associato ha come soluzione base $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

$$\text{Si ha } B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -11 & 8 \\ -1 & 7 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il determinante della matrice proposta è -1 .

Parte B

No. Ad esempio $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ha rango 2, ma è la matrice completa di un sistema non risolubile.

Si. Infatti il rango di una matrice è uguale al numero delle colonne dominanti, e quindi non può superare il numero totale delle colonne.