Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________________

Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria

Laurea in Ingegneria Civile e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, – prof. A. Tonolo

Prova scritta di **MATEMATICA 2** (1^o compitino) Padova, 12 ottobre 2002

TEMA 3

A1	A2	A3	A4	B

Tempo a disposizione: $120'$. **Gli esercizi vanno svolti con le dovute giustificazioni sul foglio di bella.** Il testo (il presente foglio) va consegnato insieme al foglio di bella. Non si possono usare calcolatrici, appunti, libri, telefoni.

Parte A (*8 punti*) Sia $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(A1) Si determini la decomposizione LU della matrice A.

(A2) Trovare la soluzione generale del sistema che ha A come matrice completa e le soluzioni base del sistema omogeneo associato.

(A3) Si calcoli l'inversa della matrice $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 11 \end{bmatrix}$.

(A4) Si calcoli il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Parte B (*4 punti*) Sia A la matrice completa di un sistema lineare. Supponiamo che A abbia dimensione $n \times l$ e $\operatorname{rank} A = n$. È vero che il sistema lineare in questione è risolubile? È vero che necessariamente $n \leq l$? Per ciascuna domanda, produrre una dimostrazione (in caso di risposta affermativa) o un controesempio (in caso di risposta negativa).

Soluzioni

$$L = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \; U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La soluzione generale è

$$\begin{bmatrix} 2s & s & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T + s \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Il sistema omogeneo associato ha come soluzione base $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Si ha $B^{-1} = \begin{bmatrix} 17 & 1 & 8 \\ -11 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Il determinante della matrice proposta è -2.

Parte B

No. Ad esempio $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ha rango 2, ma è la matrice completa di un sistema non risolubile.

Si. Infatti il rango di una matrice è uguale al numero delle colonne dominanti, e quindi non puó superare il numero totale delle colonne.