Cognome ______________ Nome ______________ Matricola ______________

Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
Laurea in Ingegneria Civile e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, – prof. A. Tonolo

Prova scritta di **MATEMATICA 2** (2^o compitino) Padova, 25 ottobre 2002

TEMA 1

A1	A2	A3	A4	B

Tempo a disposizione: 120′. **Gli esercizi vanno svolti con le dovute giustificazioni sul foglio di bella.** Il testo (il presente foglio) va consegnato insieme al foglio di bella. Non si possono usare calcolatrici, appunti, libri, telefoni.

Parte A (*6 punti*) Sia $A_a = \begin{bmatrix} 2 & a & a \\ -10 & 2-2a & 5-2a \\ 10 & 2a & -3+2a \end{bmatrix}$.

(A1) Si dica se per $a = 0$ e $a = 1$ la matrice A_a è diagonalizzabile.

(A2) Se A_0 è diagonalizzabile si calcoli la matrice diagonale D simile ad A e la matrice P tale che $A_0 = PDP^{-1}$; se A_0 non è diagonalizzabile si dica quanti sono i blocchi di Jordan associati a ciascun autovalore e si indichi la forma di Jordan di A_0.

(A3) Se A_1 è diagonalizzabile si calcoli la matrice diagonale D simile ad A e la matrice P tale che $A_1 = PDP^{-1}$; se A_1 non è diagonalizzabile si dica quanti sono i blocchi di Jordan associati a ciascun autovalore e si indichi la forma di Jordan di A_1.

Parte B1 (*2 punti*) Si dia, se possibile, un esempio di una matrice 4×4 con tre autovalori

1. non diagonalizzabile;
2. diagonalizzabile.

Parte B2 (*5 punti*) Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 5/4 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$ e $V_0 = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$. Si dia una valutazione approssimata di $A^k V_0$ per $k \gg 0$.

Soluzioni Parte A.

Se $a = 0$ la matrice e' diagonalizzabile; se $a = 1$ no. Nel primo caso $D = \mathrm{diag}\{2, 2, -3\}$ e $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Nel secondo caso, cioè per $a = 1$, la matrice non è diagonalizzabile. Vi è un blocco di Jordan associato all'autovalore 2 ed uno associato all'autovalore -3. La forma di Jordan è $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

Parte B. 1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; 2. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

B2

A ha autovalori 1 e 1/4. Gli autovettori-base associati sono rispettivamente $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $Y = \begin{bmatrix} -5 & 3 \end{bmatrix}^T$. A è diagonalizzabile e la matrice P che diagonalizza A è $P = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Ora $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ e quindi si ha $b = P^{-1}V_0 = \begin{bmatrix} 47/3 & 4/3 \end{bmatrix}^T$. Allora $V_k \approx 1^k b_1 X = \dfrac{47}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 47/3 & 0 \end{bmatrix}^T$.