

Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
 Laurea in Ingegneria Civile e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, – prof. A. Tonolo

Prova scritta di **MATEMATICA 2** (2° compitino)

Padova, 25 ottobre 2002

TEMA 3

A1	A2	A3	B1	B2
----	----	----	----	----

Tempo a disposizione: 120'. **Gli esercizi vanno svolti con le dovute giustificazioni sul foglio di bella.** Il testo (il presente foglio) va consegnato insieme al foglio di bella. Non si possono usare calcolatrici, appunti, libri, telefoni.

Parte A (6 punti) Sia $A_a = \begin{bmatrix} 3 & a & a \\ -10 & 3-2a & 5-2a \\ 10 & 2a & -2+2a \end{bmatrix}$.

- (A1) Si dica se per $a = 0$ e $a = 1$ la matrice A_a è diagonalizzabile.
- (A2) Se A_0 è diagonalizzabile si calcoli la matrice diagonale D simile ad A e la matrice P tale che $A_0 = PDP^{-1}$; se A_0 non è diagonalizzabile si dica quanti sono i blocchi di Jordan associati a ciascun autovalore e si indichi la forma di Jordan di A_0 .
- (A3) Se A_1 è diagonalizzabile si calcoli la matrice diagonale D simile ad A e la matrice P tale che $A_1 = PDP^{-1}$; se A_1 non è diagonalizzabile si dica quanti sono i blocchi di Jordan associati a ciascun autovalore e si indichi la forma di Jordan di A_1 .

Parte B1 (2 punti) Si dia, se possibile, un esempio di una matrice 4×4 con tre autovalori

1. non diagonalizzabile;
2. diagonalizzabile.

Parte B2 (5 punti) Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & -5/4 \\ 0 & -1/4 \end{bmatrix}$ e $V_0 = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$. Poniamo $V_k = AV_{k-1}$ per ogni $k \geq 1$. Si dia una valutazione approssimata di V_k per $k \gg 0$.

Soluzioni Parte A.

Se $a = 0$ la matrice è diagonalizzabile; se $a = 1$ no. Nel primo caso $D = \text{diag}\{3, 3, -2\}$ e

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Nel secondo caso, cioè per $a = 1$, la matrice non è diagonalizzabile. Vi è un

blocco di Jordan associato all'autovalore -2 ed uno associato all'autovalore 3 . La forma di Jordan è

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Parte B. 1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; 2. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

B2

A ha autovalori 1 e $-1/4$. Gli autovettori-base associati sono rispettivamente $X = [1 \ 0]^T$ e $Y = [1 \ 1]^T$. A è diagonalizzabile e la matrice P che diagonalizza A è $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ora $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e quindi si ha $b = P^{-1}V_0 = [4 \ 3]^T$. Allora $V_k \approx 1^k b_1 X = 4 [1 \ 0]^T = [4 \ 0]^T$.