Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________________

Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria

Laurea in Ingegneria Civile e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, – prof. A. Tonolo

Prova scritta di **MATEMATICA 2** (3^o compitino) Padova, 20 novembre 2002

TEMA 2

A1	A2	A3	A4	B

Tempo a disposizione: $120'$. **Gli esercizi vanno svolti con le dovute giustificazioni sul foglio di bella.** Il testo (il presente foglio) va consegnato insieme al foglio di bella. Non si possono usare calcolatrici, appunti, libri, telefoni.

Parte A (*8 punti*)

(A1) Calcolare la decomposizione QR della matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Determinare poi le soluzioni approssimate del sistema lineare $AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Le soluzioni approssimate trovate sono soluzioni esatte del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$?

(A2) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ sono date le rette

$$r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases} ; \qquad s : \begin{cases} x + 2z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases} .$$

Stabilire la posizione reciproca tra le due rette e calcolarne la distanza.

(A3) (i) Si verifichi che la trasformazione $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $T(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} y + 2z \\ -z \end{bmatrix}$ è lineare.

(ii) Si verifichi che $\mathcal{F} = \{\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

(iii) Si determini la matrice $M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(T)$ associata alla trasformazione lineare T definita al punto (i) rispetto alla base $\mathcal{F}$ nel dominio ed alla base standard $\mathcal{E}$ nel codominio.

(A4) Si consideri la base $\mathcal{G} = \{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T\}$ di $\mathbb{R}^3$.

(i) Si calcoli la colonna delle coordinate del vettore $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$ rispetto alla base $\mathcal{G}$.

(ii) La base $\mathcal{G}$ è ortogonale?

Parte B (*5 punti*)

(B1) Dato un endomorfismo $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, siano $M = M_{\mathcal{F}}(T)$ ed $N = M_{\mathcal{G}}(T)$ le matrici di T rispetto a due basi assegnate $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ di $\mathbb{R}^n$. Determinare la relazione che intercorre tra M ed N.

(B2) Date due rette non parallele nello spazio euclideo, si dica quanti sono i piani ortogonali ad entrambe le rette.

Tema 2: Soluzioni

Parte A1. $Q_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Le soluzioni approssimate sono le soluzioni di $RX = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & \sqrt{11} & -\sqrt{11} & \sqrt{11} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = Q^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Risulta $X = \left[\frac{31}{90} - 2t, \frac{1}{10} + t, t, \frac{-1}{10}\right]$. Non sono soluzioni esatte.

Parte A2. Dalla decomposizione LU della matrice completa del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ricaviamo che le rette sono sghembe. La retta r ha direzione $\vec{d_r} = (0,1,1)^T$ e passa per $R(0,0,1)$; la retta s ha direzione $\vec{d_s} = (2,1,-1)^T$ e passa per $S(1,2,0)$. Il vettore

$$\vec{n} = \vec{d_r} \times \vec{d_s} = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & 0 & 2 \\ \vec{j} & 1 & 1 \\ \vec{k} & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

è ortogonale ad entrambe le rette, e la distanza tra le rette è pari al modulo della proiezione ortogonale di $\vec{RS} = (1,2,-1)^T$ su $\vec{n}$:

$$d(r,s) = \| \frac{\vec{RS} \bullet \vec{n}}{\vec{n} \bullet \vec{n}} \vec{n} \| = \frac{4}{12} \|\vec{n}\| = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Parte A3. (i) Verifica standard. (ii) Scambiando i primi due vettori, si trova una matrice triangolare. (iii) $M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Parte A4. La base $\mathcal{G}$ è ortogonale. Possiamo quindi calcolare le coordinate di $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$ mediante il teorema dello sviluppo di Fourier: $C_{\mathcal{G}}(\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}^T$.

Parte B1. Le matrici M ed N sono simili. Leggere il §4.9.4.

Parte B2. Nessun piano dello spazio può essere simultaneamente ortogonale a due direzioni distinte.