

TEMA 3

A1	A2	A3	A4	B
----	----	----	----	---

Tempo a disposizione: 120'. Gli esercizi vanno svolti con le dovute giustificazioni sul foglio di bella. Il testo (il presente foglio) va consegnato insieme al foglio di bella. Non si possono usare calcolatrici, appunti, libri, telefoni.

Parte A (8 punti)

(A1) Calcolare la decomposizione QR della matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Determinare poi le soluzioni approssimate del sistema lineare $AX = [1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$.

Le soluzioni approssimate trovate sono soluzioni esatte del sistema $AX = [1 \ 0 \ 1 \ 0]^T$?

(A2) Nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 sono date le rette

$$r : \begin{cases} x + 2z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} ; \quad s : \begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ x + 2z = 2 \end{cases} .$$

Stabilire la posizione reciproca tra le due rette e calcolarne la distanza.

(A3) (i) Si verifichi che la trasformazione $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita ponendo $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2z \\ -z \end{bmatrix}$ è lineare.

(ii) Si verifichi che $\mathcal{F} = \{[-1 \ -1 \ 0]^T, [2 \ 0 \ 0]^T, [3 \ 0 \ 1]^T\}$ è una base di \mathbb{R}^3 .

(iii) Si determini la matrice $M_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(T)$ associata alla trasformazione lineare T definita al punto (i) rispetto alla base \mathcal{F} nel dominio ed alla base standard \mathcal{E} nel codominio.

(A4) Si consideri la base $\mathcal{G} = \{[-1 \ 1 \ 0]^T, [1 \ 1 \ 1]^T, [1 \ 1 \ -2]^T\}$ di \mathbb{R}^3 .

(i) Si calcoli la colonna delle coordinate del vettore $[3 \ -2 \ 1]^T$ rispetto alla base \mathcal{G} .

(ii) La base \mathcal{G} è ortogonale?

Parte B (5 punti)

(B1) Dato un endomorfismo $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, siano $M = M_{\mathcal{F}}(T)$ ed $N = M_{\mathcal{G}}(T)$ le matrici di T rispetto a due basi assegnate \mathcal{F} e \mathcal{G} di \mathbb{R}^n . Determinare la relazione che intercorre tra M ed N .

(B2) Date due rette non parallele nello spazio euclideo, si dica quanti sono i piani ortogonali ad entrambe le rette.

Tema 3: Soluzioni

Parte A1. $Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $R_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Le soluzioni approssimate sono le soluzioni di $RX = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & \sqrt{11} & \sqrt{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = Q^T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Risulta $X = [\frac{281}{990} + 3t, \frac{3}{11} - t, t, \frac{1}{10}]$. Non sono soluzioni esatte.

Parte A2. Dalla decomposizione LU della matrice completa del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ricaviamo che le rette sono sghembe. La retta r ha direzione $\vec{d}_r = (-2, 2, 1)^T$ e passa per $R(1, -1, 0)$; la retta s ha direzione $\vec{d}_s = (2, -1, -1)^T$ e passa per $S(0, -2, 1)$. Il vettore

$$\vec{n} = \vec{d}_r \times \vec{d}_s = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & -2 & 2 \\ \vec{j} & 2 & -1 \\ \vec{k} & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

è ortogonale ad entrambe le rette, e la distanza tra le rette è pari al modulo della proiezione ortogonale di $\vec{RS} = (-1, -1, 1)^T$ su \vec{n} :

$$d(r, s) = \left\| \frac{\vec{RS} \bullet \vec{n}}{\vec{n} \bullet \vec{n}} \vec{n} \right\| = \frac{1}{5} \|\vec{n}\| = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Parte A3. (i) Verifica standard. (ii) Scambiando i primi due vettori, si trova una matrice triangolare.

(iii) $M_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(T) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Parte A4. La base \mathcal{G} è ortogonale. Possiamo quindi calcolare le coordinate di $[3 \ -2 \ 1]^T$ mediante il teorema dello sviluppo di Fourier: $C_{\mathcal{G}}([3 \ -2 \ 1]^T) = [\frac{-5}{2} \ \frac{2}{3} \ \frac{-1}{6}]^T$.

Parte B1. Le matrici M ed N sono simili. Leggere il §4.9.4.

Parte B2. Nessun piano dello spazio può essere simultaneamente ortogonale a due direzioni distinte.