Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________________

Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria Laurea in Ingegneria Civile e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, – prof. A. Tonolo

Prova scritta di **MATEMATICA 2** (appello) Padova, 27 novembre 2002

TEMA 2

A1	A2	A3	A4	B

Tempo a disposizione: $180'$. **Gli esercizi vanno svolti con le dovute giustificazioni sul foglio di bella.** Il testo (il presente foglio) va consegnato insieme al foglio di bella. Non si possono usare calcolatrici, appunti, libri, telefoni.

Parte A

(A1) (a) Determinare la decomposizione LU della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Per quali colonne B il sistema $AX = B$ è risolubile?

(c) Determinare la decomposizione QR non normalizzata e la decomposizione QR normalizzata della matrice A. Determinare quindi le soluzioni approssimate del sistema lineare

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

(A2) Si dica se la matrice $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile. Se lo è se ne calcoli la forma diagonale D e la matrice P tale che $P^{-1}AP = D$; altrimenti se ne calcoli la forma di Jordan J.

(A3) Si considerino le seguenti trasformazioni $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

$$f : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x - y + z \\ -2y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 \\ x - y \end{bmatrix}.$$

Si fissi la base standard $\mathcal{E}$ nel dominio $\mathbb{R}^3$ e la base $\mathcal{G} = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \}$ nel codominio $\mathbb{R}^2$.

(a) Se f è lineare, si determini la $\mathcal{E}$-$\mathcal{G}$-matrice di f.

(b) Se g è lineare, si determini la $\mathcal{E}$-$\mathcal{G}$-matrice di g.

(A4) (a) Calcolare la distanza del punto $P(0, 0, 1)$ dalla retta

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

(b) Scrivere le equazioni cartesiane della retta s per P e per $Q(2, 0, -1)$.

(c) P è il punto di minima distanza di s da r?

Parte B

(B1) Siano λ_1 e λ_2 due autovalori distinti di una matrice A reale simmetrica, e X_1 ed X_2 due autovettori associati rispettivamente a λ_1 e λ_2. Dimostrare che X_1 ed X_2 sono tra loro ortogonali. [Suggerimento: $\lambda_1 X_1 \bullet X_2 = ...$]

(B2) Siano S e T due isometrie di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che la loro composizione $S \circ T$, definita da $(S \circ T)(X) = S(T(X))$ per ogni $X \in \mathbb{R}^n$, è ancora una isometria di $\mathbb{R}^n$.