

TEMA 3

A1	A2	A3	A4	B

Tempo a disposizione: 180'. **Gli esercizi vanno svolti con le dovute giustificazioni sul foglio di bella.** Il testo (il presente foglio) va consegnato insieme al foglio di bella. Non si possono usare calcolatrici, appunti, libri, telefoni.

Parte A

(A1) (a) Determinare la decomposizione LU della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Per quali colonne B il sistema $AX = B$ è risolubile?

(c) Determinare la decomposizione QR non normalizzata e la decomposizione QR normalizzata della matrice A . Determinare quindi le soluzioni approssimate del sistema lineare

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

(A2) Si dica se la matrice $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile. Se lo è se ne calcoli la forma diagonale D e la matrice P tale che $P^{-1}AP = D$; altrimenti se ne calcoli la forma di Jordan J .

(A3) Si considerino le seguenti trasformazioni $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$f : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2z \\ x + y - z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad g : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x + z \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si fissi la base standard $\mathcal{E}$ nel dominio $\mathbb{R}^3$ e la base $\mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ nel codominio $\mathbb{R}^2$.

(a) Se f è lineare, si determini la $\mathcal{E}$ - $\mathcal{G}$ -matrice di f .

(b) Se g è lineare, si determini la $\mathcal{E}$ - $\mathcal{G}$ -matrice di g .

(A4) (a) Calcolare la distanza del punto $P(1, 1, 1)$ dalla retta

$$r : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}.$$

- (b) Scrivere le equazioni cartesiane della retta s per P e per $Q(2, 3, 2)$.
(c) P è il punto di minima distanza di s da r ?

Parte B

- (B1) Siano λ_1 e λ_2 due autovalori distinti di una matrice A reale simmetrica, e X_1 ed X_2 due autovettori associati rispettivamente a λ_1 e λ_2 . Dimostrare che X_1 ed X_2 sono tra loro ortogonali.
[Suggerimento: $\lambda_1 X_1 \bullet X_2 = \dots$]
- (B2) Siano S e T due isometrie di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che la loro composizione $S \circ T$, definita da $(S \circ T)(X) = S(T(X))$ per ogni $X \in \mathbb{R}^n$, è ancora una isometria di $\mathbb{R}^n$.