Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
 Laurea in Ingegneria Civile e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, – prof. A. Tonolo

Prova scritta di **MATEMATICA 2** (1° recupero)

Padova, 8 settembre 2003

TEMA 1

A1	A2	A3	A4	B

Tempo a disposizione: 180'. Gli esercizi vanno svolti con le dovute giustificazioni sul foglio di bella. Il testo (il presente foglio) va consegnato insieme al foglio di bella. Non si possono usare calcolatrici, appunti, libri, telefoni.

Parte A

(A1) (a) Determinare la decomposizione LU della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

- (b) Per quali colonne B il sistema $AX = B$ è risolubile?
- (c) Determinare la decomposizione QR non normalizzata e la decomposizione QR normalizzata della matrice A . Determinare quindi le soluzioni approssimate del sistema lineare

$$AX = [0 \ 1 \ 0 \ 0]^T.$$

Soluzione

(a) $E_{2,4}A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & -11 & 0 \\ 4 & -4 & -6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

(b) Tutte e sole le combinazioni lineari delle colonne di A , ovvero $\alpha [1 \ 4 \ 4 \ 1]^T + \beta [2 \ 4 \ 3 \ 4]^T + \gamma [0 \ 2 \ -1 \ -4]^T.$

(c) $A = Q_0 R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$ Le soluzioni approssimate del sistema

lineare sono $X = \left[\frac{2}{17} - \frac{1}{5} - 2\alpha \quad \alpha \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \right]^T.$

- (A2) Si dica se la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile. Se lo è se ne calcoli la forma diagonale D e la matrice P tale che $P^{-1}AP = D$; altrimenti se ne calcoli la forma di Jordan J .

Soluzioni Il polinomio caratteristico è $(x-2)^3$. L'autospazio $V_2 = \langle [1 \ 1 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 1]^T \rangle$.

La matrice non è diagonalizzabile; la sua forma di Jordan è $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- (A3) Si consideri la trasformazione $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+y \\ 2y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si fissi la base standard $\mathcal{E}$ nel codominio $\mathbb{R}^3$ e la base $\mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ nel dominio $\mathbb{R}^2$.

(a) Se f è lineare, si determini la $\mathcal{G}$ - $\mathcal{E}$ -matrice di f .

(b) Si determini l'immagine tramite f del vettore che ha $\mathcal{G}$ -coordinate $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}^T$.

Soluzioni (a) f è lineare. La $\mathcal{G}$ - $\mathcal{E}$ -matrice di f è $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $[1 \ -4 \ 0]^T$

- (A4) (a) Calcolare la distanza del punto $P(1, 1, 1)$ dalla retta

$$r : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 2t \\ z = 1 \end{cases}.$$

(b) Scrivere l'equazione del piano π per P per il quale $d(\pi, r) = d(P, r)$.

Soluzioni (a) $d(P, r) = \sqrt{5}$

(b) π ha equazione $-y + z = 0$.

Parte B

- (B1) Di una matrice A si sa che $A^2 = \begin{bmatrix} 13 & 16 \\ 48 & 61 \end{bmatrix}$ e che il suo polinomio caratteristico è $p_A(t) = t^2 - 8t - 5$. Determinare A .

Soluzione: per Cayley-Hamilton, $8A = A^2 - 5I$, da cui ricaviamo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$.

- (B2) Date due rette sghembe r_1 ed r_2 nello spazio tridimensionale, quante sono le rette ortogonali ad r_1 ed r_2 che passano per un punto P dato? Ne esiste sempre almeno una passante per r_1 e r_2 ? e per r_1 o r_2 ? Giustificare le risposte.

Soluzione: una sola, la retta per P avente direzione un generatore $\vec{d}$ di $(\vec{d}_1)^\perp \cap (\vec{d}_2)^\perp = (\vec{d}_1 \oplus \vec{d}_2)^\perp$, dove $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$ sono le direzioni di r_1 ed r_2 rispettivamente. Tale retta può non passare né per r_1 né per r_2 : basta scegliere P in modo tale che il piano per P e r_1 ed il piano per P ed r_2 non siano paralleli a $\vec{d}$. Ad esempio si consideri r_1 uguale all'asse delle z , r_2 la retta parallela all'asse delle y passante per il punto $(1, 0, 0)$ e come punto P il punto $(0, 1, 1)$.