

Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
 Laurea in Ingegneria Civile e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, – prof. A. Tonolo

Prova scritta di **MATEMATICA 2** (1° recupero)

Padova, 22 settembre 2003

TEMA 2

A1	A2	A3	A4	B

Tempo a disposizione: 180'. **Gli esercizi vanno svolti con le dovute giustificazioni sul foglio di bella.** Il testo (il presente foglio) va consegnato insieme al foglio di bella. Non si possono usare calcolatrici, appunti, libri, telefoni.

Parte A

(A1) (a) Determinare la decomposizione LU della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

(b) Per quali colonne B il sistema $AX = B$ è risolubile?

(c) Determinare la decomposizione QR non normalizzata e la decomposizione QR normalizzata della matrice A . Determinare quindi le soluzioni approssimate del sistema lineare

$$AX = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Soluzione

(a) $E_{2,4}A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & -11 & 0 \\ 4 & -4 & -6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

(b) Tutte e sole le combinazioni lineari delle colonne di A , ovvero $\alpha \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}^T + \beta \begin{bmatrix} 3 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}^T + \gamma \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}^T.$

(c) $A = Q_0 R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$ Le soluzioni approssimate del sistema lineare sono $X = \left[\frac{2}{17} + \frac{2}{5} - \alpha \quad \alpha \quad -\frac{1}{5} \quad \frac{1}{5} \right]^T.$

(A2) Si dica se la matrice $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile. Se lo è se ne calcoli la forma

diagonale D e la matrice P tale che $P^{-1}AP = D$; altrimenti se ne calcoli la forma di Jordan J .

Soluzioni Il polinomio caratteristico è $x(x-2)^2$. La matrice è diagonalizzabile; la H che

diagonalizza è $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$

(A3) Si consideri la trasformazione $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+2y \\ 0 \\ 2x-y \\ y \end{bmatrix}$. Si fissi la base standard $\mathcal{E}$ nel

dominio $\mathbb{R}^2$ e la base $\mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ nel codominio $\mathbb{R}^4$.

(a) Se f è lineare, si determini la $\mathcal{G}$ - $\mathcal{E}$ -matrice di f .

(b) Si determinino le $\mathcal{G}$ -coordinate dell'immagine tramite f del vettore $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}^T$.

Soluzioni (a) f è lineare. La $\mathcal{G}$ - $\mathcal{E}$ -matrice di f è $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 & 0 \end{bmatrix}^T$

(A4) (a) Calcolare la distanza del punto $P(4, 2, 1)$ dal piano π di equazione $4x + y + 3z = 4$.

(b) Scrivere l'equazione della retta r per P , parallela al piano $z = 0$ per la quale $d(\pi, r) = d(P, \pi)$.

Soluzioni (a) $d(P, \pi) = \frac{17}{\sqrt{26}}$

(b) r ha equazione $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 - 4t \\ z = 1 \end{cases}$

Parte B

(B1) Calcolare, per ogni valore intero k , la potenza k -esima A^k della matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$.

Soluzione: $A^k = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(B2) In $\mathbb{R}^2$ consideriamo due punti distinti P_1 e P_2 . Si studi l'esistenza e l'unicità delle trasformazioni lineari che scambiano i punti P_1 e P_2 .

Soluzione: dobbiamo distinguere i seguenti casi:

(a) $P_1 \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e viceversa,

(b) $P_1, P_2 \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ appartenenti ad una stessa retta per l'origine,

(c) $P_1, P_2 \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ non appartenenti ad una stessa retta per l'origine.

Nel caso 1 nessuna, infatti una trasformazione lineare manda sempre il vettore nullo nel vettore nullo. Nel caso 2 si ha $OP_1 = \alpha OP_2$ per un opportuno scalare α ; pertanto se una trasformazione lineare φ manda OP_2 in $OP_1 = \alpha OP_2$, allora

$$\varphi(OP_1) = \varphi(\alpha OP_2) = \alpha \varphi(OP_2) = \alpha OP_1 = \alpha^2 OP_2.$$

Pertanto deve essere $\alpha^2 = 1$. α non può essere uguale ad 1, altrimenti $P_1 = P_2$; pertanto $\alpha = -1$. In conclusione se $OP_1 = \alpha OP_2$, con $\alpha \neq -1$ non esiste alcuna applicazione lineare che scambi P_1 con P_2 , altrimenti ve ne sono infinite, tutte quelle che hanno OP_1 come autovettore di autovalore -1 . Infine nel 3 caso OP_1 e OP_2 sono linearmente indipendenti, e quindi sono una base di $\mathbb{R}^2$. Comunque dati due vettori u e v di $\mathbb{R}^2$ esiste una ed una sola trasformazione lineare che manda OP_1 in u e OP_2 in v . In particolare ne esiste una ed una sola che scambia OP_1 e OP_2 .