Soluzioni Tema 3

TEMA 3

Parte A1 $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Il sistema e' risolubile per ogni colonna B.

$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2/3 & 0 \\ 1 & -1 & 2/3 & 0 \\ 2 & 0 & -2/3 & 0 \end{bmatrix}$, $R_0 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Le soluzioni approssimate del sistema sono anche soluzioni esatte: infatti il sistema era risolubile per ogni colonna B di termini noti: esse sono $\begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + t \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Parte A2

Il polinomio caratteristico è $x(x+1)^2$. Gli autovettori base associati a -1 sono $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. L'autovettore base associato a 0 è $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. La matrice è diagonalizzabile e si ha $P^-1AP = D$ con $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \operatorname{diag} -1, -1, 0$.

Parte A3

f e g sono entrambe lineari. Le matrici associate ad f e g rispetto alle basi $\mathcal{E}$ nel dominio e $\mathcal{G}$ nel codominio sono $\begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Parte A4

(a) r ha direzione $\vec{d_r} = [1, -1, 1]^T$ e passa per $P'(-1, 0, -1)$. La proiezione di $\vec{PP'} = [-2, -1, -2]^T$ su $\vec{d_r}$ è $\frac{\vec{PP'} \bullet \vec{d_r}}{\vec{d_r} \bullet \vec{d_r}} \vec{d_r} = -\vec{d_r}$. Pertanto $d(P, r) = \| \vec{PP'} - (-\vec{d_r}) \| = \| [-1, -2, -1]^T \| = \sqrt{6}$.

(b) s per P di direzione $\vec{PQ} = [1, 2, 1]^T$ ha equazioni cartesiane

$$s : \begin{cases} x - z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}.$$

(c) No: $r \cap s = R(0, -1, 0)$ quindi $d(r, s) = 0$.

Parte B1

Dobbiamo dimostrare che $X_1 \bullet X_2 = X_1^T X_2 = 0$. Abbiamo che

$$\begin{aligned} (\lambda_1 X_1^T) X_2 &= (AX_1)^T X_2 && \text{perché } X_1 \text{ è un autovettore} \\ &= X_1^T A^T X_2 && \text{proprietà della trasposizione} \\ &= X_1^T (AX_2) && \text{perché } A \text{ è simmetrica} \\ &= X_1^T \lambda_2 X_2 && \text{perché } X_2 \text{ è un autovettore} \\ &= \lambda_2 (X_1^T X_2). \end{aligned}$$

Pertanto $(\lambda_1 - \lambda_2) X_1 \bullet X_2 = (\lambda_1 - \lambda_2) X_1^T X_2 = 0$. Siccome $\lambda_1 \neq \lambda_2$, necessariamente $X_1 \bullet X_2 = 0$.

Parte B2

Per ogni X, $Y \in \mathbb{R}^n$ abbiamo che

$$\begin{aligned} \|S(T(X)) - S(T(Y))\| &= \|T(X) - T(Y)\| && \text{perché } S \text{ è una isometria} \\ &= \|X - Y\| && \text{perché } T \text{ è una isometria.} \end{aligned}$$

Pertanto $S \circ T$ è una isometria di $\mathbb{R}^n$.