Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________________

Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
Laurea in Ingegneria Civile e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, – prof. A. Tonolo

Prova scritta di **MATEMATICA 2** (1^o compitino)

Padova, 17 ottobre 2003

TEMA 1

Tempo a disposizione: $105'$**. Gli esercizi vanno svolti con le dovute giustificazioni sul foglio di bella.** Il testo (il presente foglio) va consegnato insieme al foglio di bella. Non si possono usare calcolatrici, appunti, libri, telefoni.

Parte A (*8 punti*) Sia $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & 9 \\ 2 & -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$.

(A1) Si determini la decomposizione LU della matrice A.

(A2) Trovare la soluzione generale del sistema che ha A come matrice completa e le soluzioni base del sistema omogeneo associato.

(A3) Si calcoli, tramite l'algoritmo di inversione, l'inversa della matrice $B = \begin{bmatrix} -6 & 6 & -1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(A4) Si calcoli il determinante della matrice

$$C = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 3 & -9 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Soluzioni A1: $P = I$, $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A2: La soluzione generale del sistema lineare che ha A come matrice completa è $\begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \end{bmatrix}^T + s \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Le soluzioni base del sistema omogeneo associato sono $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

A3: La matrice B ha rango 3 e quindi risulta invertibile. Infatti una sua forma a scala per righe è $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1/6 \\ 0 & 1 & 13/30 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. L'inversa di B è $B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 18 \\ 3 & -5 & 13 \\ -7 & 12 & -30 \end{bmatrix}$.

A4: Il determinante della matrice C è uguale a 27: infatti $C = LU$ con $L = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ed $U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Parte B (*5 punti*)

B1 Scrivere nella forma $\alpha + i\beta$, con α, $\beta \in \mathbb{R}$, il numero complesso $(-3+2i)/(4-i)$.

B2 Sia A una matrice $n \times m$ di rango n. Esiste una matrice B $m \times n$ tale che $AB = I_n$? Se si, darne una dimostrazione, altrimenti produrre un controesempio.

B3 Siano B, C due matrici tali che BC sia simmetrica: B e C sono necessariamente simmetriche? Se si, darne una dimostrazione, altrimenti produrre un controesempio.

Soluzioni B1: Moltiplicando sopra e sotto per $4+i$ si ottiene $-\dfrac{14}{17} + \dfrac{5}{17}i$.

B2: Avendo A rango n, certamente $m \geq n$. Le colonne B_i di B devono essere soluzioni dei sistemi lineari $AX = E_i$ dove E_i è la i-esima colonna della matrice identità. Se tutti tali sistemi sono risolubili, certamente esiste la B cercata. Ora avendo A rango n, ogni matrice $\begin{bmatrix} A & ? \end{bmatrix}$ avrà rango almeno n (perchè contiene A) ed al più n (perchè il rango non può superare il numero delle righe): dunque, qualunque sia la colonna dei termini noti il rango della matrice completa è uguale al rango della matrice dei coefficienti.

B3: No! $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ che è simmetrica.