Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________________

Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
Laurea in Ingegneria Civile e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, – prof. A. Tonolo

Prova scritta di **MATEMATICA 2** (2^o compitino)

Padova, 31 ottobre 2003

TEMA 1

Tempo a disposizione: $105'$. **Gli esercizi vanno svolti con le dovute giustificazioni sul foglio di bella.** Il testo (il presente foglio) va consegnato insieme al foglio di bella. Non si possono usare calcolatrici, appunti, libri, telefoni.

Parte A (*8 punti*) Si consideri la matrice $A_\alpha = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9-\alpha & 10-2\alpha \\ 0 & \alpha-4 & 2\alpha-4 \end{bmatrix}$.

(A1) Si determini il polinomio caratterisico di A_α e se ne studino gli autovalori al variare del parametro α.

(A2) Per quali valori di α la matrice A_α è diagonalizzabile?

(A3) Per $\alpha = 5$si determinino le matrici P e D tali che $P^{-1}A_5P = D$.

(A4) Per i valori di α per i quali A_α risulta non diagonalizzabile si determini la forma di Jordan J_α di A_α.

Si considerino le rette

$$s_1 : \begin{cases} x + 2y - z &= 1 \\ y + z &= 3 \end{cases} \qquad s_2 : \begin{cases} x &= 3 + t \\ y &= 5 - 2t \\ z &= 3 \end{cases}$$

e il piano π di equazione $7x - y + 2z = 4$.

(A5) Determinare l'equazione parametrica di s_1 e l'equazione cartesiano di s_2.

(A6) Determinare la retta passante per s_1 e s_2 ortogonale al piano π.

Soluzioni

A1. Il polinomio caratteristico è $(x-4)^2(x-\alpha-1)$ Se $\alpha = 3$ vi è il solo autovalore 4 con molteplicità 3. Se $\alpha \neq 3$ abbiamo l'autovalore 4 con molteplicità 2 e l'autovalore $\alpha + 1$ con molteplicità 1.

A2. La matrice A_α è diagonalizzabile se e solo se $\alpha \neq 3$. Infatti, qualunque sia α, vi sono due autovettori-base associati all'autovalore 4.

A3. $P_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

A4. Per $\alpha = 3$ la forma di Jordan di A_3 è $J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

A5. L'equazione parametrica di s_1 e l'equazione cartesia di s_2 sono

$$s_1 : \begin{cases} x &= -5+3t \\ y &= 3-t \\ z &= t \end{cases} \qquad s_2 : \begin{cases} 2x+y &= 11 \\ z &= 3 \end{cases}$$

A6. La retta cercata ha equazione parametrica e cartesiana rispettivamente

$$\begin{cases} x &= -2+7t \\ y &= 2-t \\ z &= 1+2t \end{cases} \qquad \begin{cases} x+7y &= 12 \\ 2y+z &= 5 \end{cases}$$

Parte B (*5 punti*)

(B1) Sia A una matrice diagonalizzabile; la matrice $A+2I$ è diagonalizzabile? Se si, lo si dimostri, se no si produca un controesempio.

(B2) Scrivere un polinomio di secondo grado $f(x)$ che interpoli i valori di $\cos x$ in $0, \frac{\pi}{2}, \pi$. Calcolare $f(\frac{2\pi}{3})$.

Soluzioni

B1. Se A è diagonalizzabile esistono una matrice invertibile P ed una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$. Ora, usando questa stessa P si ha

$$P^{-1}(A+2I)P = P^{-1}AP + P^{-1}(2I)P = P^{-1}AP + 2I = D + 2I,$$

pertanto anche $A+2I$ è diagonalizzabile.

B2. Il polinomio interpolatore è $1 - \dfrac{2}{\pi}x$. Il valore assunto in $\dfrac{2}{3}\pi$ è $-\dfrac{1}{3}$.