Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________________

Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
Laurea in Ingegneria Civile e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, – prof. A. Tonolo

Prova scritta di **MATEMATICA 2** (3^o compitino)

Padova, 20 novembre 2003

TEMA 1

Tempo a disposizione: $105'$. **Gli esercizi vanno svolti con le dovute giustificazioni sul foglio di bella.** Il testo (il presente foglio) va consegnato insieme al foglio di bella. Non si possono usare calcolatrici, appunti, libri, telefoni.

Parte A (*10 punti*) Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(A1) Determinare la decomposizione QR non normalizzata e quella normalizzata della matrice A.

(A2) Sia $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$; determinare le soluzioni approssimate del sistema lineare $AX = B$.

Si considerino le seguenti funzioni:

$$f_\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \begin{bmatrix} x & y & w & z \end{bmatrix}^T \mapsto \begin{bmatrix} 2x - 4y + 2w + 2z \\ -x + 2y - 2z + \alpha + 1 \\ x - 2y - w + 3z \end{bmatrix}$$

(A3) Per quali valori di α la funzione f_α è lineare?

(A4) Per i valori di α per i quali f_α è lineare si determini la matrice associata.

(A5) Per i valori di α per i quali f_α è lineare, determinare una base dell'immagine di f_α.

Soluzioni A1) $Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{22} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{22} \\ -1/\sqrt{6} & 4/\sqrt{22} \\ 0 & 1/\sqrt{22} \end{bmatrix}$ $R_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 2\sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{22} & 2\sqrt{22} \end{bmatrix}$.

A2) Le soluzioni approssimate sono $\begin{bmatrix} 5/22 & 3/22 & 0 \end{bmatrix}^T + s\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$.
A3) La funzione è lineare per $\alpha = -1$; per gli altri valori no.
A4) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$
A5) Una base dell'immagine dell'applicazione è $\{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T\}$.
Parte B (*5 punti*)

(B1) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una trasformazione lineare. Dimostrare il **Teorema delle dimensioni**: $\dim(\ker T) + \dim(\operatorname{im} T) = n$.

(B2) La somma di due sottospazi U e W di $\mathbb{R}^n$ si dice *diretta* se ogni vettore di $U + W$ si esprime in modo unico come somma di un vettore di U e di un vettore di W.

(a) Dimostrare che la somma $U + W$ è diretta se e solo se $U \cap W = \{0\}$.

(b) Dimostrare che $U + U^\perp = \mathbb{R}^n$ e che tale somma è diretta.

Soluzioni B1) Sia A la matrice associata all'applicazione lineare T. Allora $\operatorname{Ker} T = A$ e $\operatorname{Im} T = \operatorname{col} A$. Pertanto $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim A + \dim \operatorname{col} A = (n - \operatorname{rank} A) + \operatorname{rank} A = n$.

B2) (a) Se la somma $U + W$ è diretta e v appartiene a $U \cap W$ si ha $v = 0 + v$ con $0 \in U$ e $v \in W$, ma anche $v = v + 0$ con $v \in U$ e $0 \in W$; allora affinché v si scriva in modo unico come somma di un vettore di U e di uno di V deve essere $v = 0$. Viceversa sia $U \cap W = \{0\}$. Supponiamo che $v \in U + W$ si scriva sia come $u_1 + w_1$ che come $u_2 + w_2$ con $u_1, u_2 \in U$ e $w_1, w_2 \in W$. Allora da $v = u_1 + w_1 = u_2 + w_2$ segue $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$ e quindi $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$ appartiene all'intersezione di U e W; essendo quest'ultima formata dal solo vettore nullo si ha $u_1 = u_2$ e $w_1 = w_2$.

(b) Sia $v \in \mathbb{R}^n$; allora $v = \operatorname{proj}_U(v) + (v - \operatorname{proj}_U(v))$. Pertanto v è somma di un vettore di U e di uno di $U^\perp$. Pertanto $\mathbb{R}^n = U + U^\perp$. Infine la somma di U e di $U^\perp$ è diretta perchè l'intersezione di U e $U^\perp$ è formata dal solo vettore nullo; si conclude quindi per quanto dimostrato nel punto precedente.