

Prova scritta di **MATEMATICA 2** (3° compitino)

Padova, 20 novembre 2003

TEMA 2

Tempo a disposizione: 105'. Gli esercizi vanno svolti con le dovute giustificazioni sul foglio di bella. Il testo (il presente foglio) va consegnato insieme al foglio di bella. Non si possono usare calcolatrici, appunti, libri, telefoni.

Parte A (10 punti) Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(A1) Determinare la decomposizione QR non normalizzata e quella normalizzata della matrice A .

(A2) Sia $B = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$; determinare le soluzioni approssimate del sistema lineare $AX = B$.

Si considerino le seguenti funzioni:

$$f_\alpha : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, [x \ y \ w \ z]^T \mapsto \begin{bmatrix} 2x + 4y - 2w + 2z + \alpha - 1 \\ -x - 2y + 2w - 3z \\ x + 2y - 3w + 5z \end{bmatrix}$$

(A3) Per quali valori di α la funzione f_α è lineare?

(A4) Per i valori di α per i quali f_α è lineare si determini la matrice associata.

(A5) Per i valori di α per i quali f_α è lineare, determinare una base dell'immagine di f_α .

Parte B (5 punti)

(B1) Sia $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una trasformazione lineare. Dimostrare il **Teorema delle dimensioni**: $\dim(\ker T) + \dim(\text{im } T) = n$.

(B2) La somma di due sottospazi U e W di \mathbb{R}^n si dice *diretta* se ogni vettore di $U + W$ si esprime in modo unico come somma di un vettore di U e di un vettore di W .

(a) Dimostrare che la somma $U + W$ è diretta se e solo se $U \cap W = \{0\}$.

(b) Dimostrare che $U + U^\perp = \mathbb{R}^n$ e che tale somma è diretta.