Cognome ____________ Nome ____________ Matricola ____________

Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria

Laurea in Ingegneria Civile e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, – prof. A. Tonolo

Prova scritta di **MATEMATICA 2** (appello)

Padova, 24 novembre 2003

TEMA 1

Tempo a disposizione: 180′. **Gli esercizi vanno svolti con le dovute giustificazioni sul foglio di bella.** Il testo (il presente foglio) va consegnato insieme al foglio di bella. Non si possono usare calcolatrici, appunti, libri, telefoni.

Parte A Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -1 & 8 & -6 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$.

(A1) Determinare la decomposizione QR non normalizzata e la decomposizione QR normalizzata della matrice A. Determinare quindi le soluzioni approssimate del sistema lineare

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

(A2) (a) Determinare la decomposizione LU della matrice A.

(b) Sia T_A la trasformazione lineare associata alla matrice A. Si calcoli $T_A(\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T)$ e si determini una base del nucleo di T_A, ovvero dello spazio null A.

(A3) Si dica se la matrice $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile.

(A4) Se lo è se ne calcoli la forma diagonale D, la matrice P e la matrice P^{-1} (con l'algoritmo di inversione) tale che $P^{-1}BP = D$.

Soluzioni A1) $Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 9 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

$R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 3/\sqrt{135} \\ 2/\sqrt{6} & 3/\sqrt{135} \\ -1/\sqrt{6} & 9/\sqrt{135} \\ 0 & 6/\sqrt{135} \end{bmatrix}$

$R = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6} & 3\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{135} & -3\sqrt{135} \end{bmatrix}$. Le soluzioni approssimate sono $\begin{bmatrix} 41/90 & 2/45 & 0 \end{bmatrix}^T + t \begin{bmatrix} -10 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$.

A2) a) $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & 12 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $T_A(\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T) = A \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 23 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$. Una base del nucleo di T_A è $\{\begin{bmatrix} -10 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T\}$.

A3) B è diagonalizzabile. Infatti ha polinomio caratteristico $x(x-1)^2$ e l'autovalore 1 ha due autovettori-base associati.

A4) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -3 & 8 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Si considerino le rette

$$r : \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T + t \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \qquad s : \begin{cases} x = 3 \\ 2y - z = -7 \end{cases}$$

(A5) Scrivere l'equazione cartesiana della retta r e l'equazione parametrica della retta s.

(A6) (a) Stabilire la posizione reciproca delle rette r ed s.

(b) Determinare la retta passante per i punti di minima distanza tra le rette r ed s.

Soluzioni

A5)

$$r : \begin{cases} x - z = -2 \\ y - 2z = -4 \end{cases} \quad ; \qquad s : [3,0,7]^T + < [0,1,2]^T >$$

A6) r ed s sono sghembe. La retta passante per i punti diminima distanza ha equazione parametrica

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Parte B

(B1) Dimostrare che i punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$, $P_4(x_4, y_4, z_4)$ appartengono ad uno stesso piano se e solo se vale la seguente condizione:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} = 0.$$

(B2) Sia A una matrice reale 2×2 tale che $\operatorname{rank} A = 1$. Dimostrare che o $\operatorname{col} A^2 = \{0^2_{\mathbb{R}}\}$ oppure $\operatorname{col} A^2 = \operatorname{col} A$.

Soluzioni B1) I 4 punti appartengono ad uno stesso piano se e solo esistono a, b, c, d tali che l'equazione $ax + by + cz + d = 0$ abbia le coordinate dei 4 punti tra le sue soluzioni. Si vuole pertanto che il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + cz_1 + d &= 0 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 + d &= 0 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 + d &= 0 \\ ax_4 + by_4 + cz_4 + d &= 0 \end{cases}$$

nelle incognite a, b, c, d ammetta una soluzione non nulla. Ma questo succede se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è minore od uguale a 3, ovvero se e solo se il deterinante della matrice dei coefficienti è zero. La matrice proposta differisce dalla matrice dei coefficienti del sistema solo per lo scambio di due colonne; queste due matrici hanno lo stesso determinante.

B2) Siano A_1 ed A_2 le colonne di $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Essendo

$$A^2 = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aA_1 + cA_2 & bA_1 + dA_2 \end{bmatrix}$$

lo spazio delle colonne di A^2 è un sottospazio dello spazio delle colonne di A. Se A ha rango 1, lo spazio $\operatorname{col} A$ ha dimensione 1, pertanto i suoi sottospazi sono $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$ e tutto $\operatorname{col} A$.