

TEMA 3

Tempo a disposizione: 180'. Gli esercizi vanno svolti con le dovute giustificazioni sul foglio di bella. Il testo (il presente foglio) va consegnato insieme al foglio di bella. Non si possono usare calcolatrici, appunti, libri, telefoni.

Parte A Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$.

- (A1) Determinare la decomposizione QR non normalizzata e la decomposizione QR normalizzata della matrice A . Determinare quindi le soluzioni approssimate del sistema lineare

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

- (A2) (a) Determinare la decomposizione LU della matrice A .
 (b) Sia T_A la trasformazione lineare associata alla matrice A . Si calcoli $T_A(\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T)$ e si determini una base del nucleo di T_A , ovvero dello spazio nullo di A .

- (A3) Si dica se la matrice $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile.

- (A4) Se lo è se ne calcoli la forma diagonale D , la matrice P e la matrice P^{-1} (con l'algoritmo di inversione) tale che $P^{-1}BP = D$.

Si considerino le rette

$$r : \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T + t \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T, \quad s : \begin{cases} x + z = 6 \\ y = 7 \end{cases}$$

- (A5) Scrivere l'equazione cartesiana della retta r e l'equazione parametrica della retta s .
 (A6) (a) Stabilire la posizione reciproca delle rette r ed s .
 (b) Determinare la retta passante per i punti di minima distanza tra le rette r ed s .

Parte B

- (B1) Dimostrare che i punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$, $P_4(x_4, y_4, z_4)$ appartengono ad uno stesso piano se e solo se vale la seguente condizione:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} = 0.$$

- (B2) Sia A una matrice reale 2×2 tale che $\text{rank } A = 1$. Dimostrare che o $\text{col } A^2 = \{0_{\mathbb{R}}^2\}$ oppure $\text{col } A^2 = \text{col } A$.