Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________________

Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria

Laurea in Ingegneria Civile e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, – prof. A. Tonolo

Prova scritta di **MATEMATICA 2** (appello)

Padova, 24 novembre 2003

TEMA 4

Tempo a disposizione: 180′. **Gli esercizi vanno svolti con le dovute giustificazioni sul foglio di bella.** Il testo (il presente foglio) va consegnato insieme al foglio di bella. Non si possono usare calcolatrici, appunti, libri, telefoni.

Parte A Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 5 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

(A1) Determinare la decomposizione QR non normalizzata e la decomposizione QR normalizzata della matrice A. Determinare quindi le soluzioni approssimate del sistema lineare

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

(A2) (a) Determinare la decomposizione LU della matrice A.

(b) Sia T_A la trasformazione lineare associata alla matrice A. Si calcoli $T_A(\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T)$ e si determini una base del nucleo di T_A, ovvero dello spazio $\operatorname{null} A$.

(A3) Si dica se la matrice $B = \begin{bmatrix} 7 & -9 & -3 \\ 4 & -5 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile.

(A4) Se lo è se ne calcoli la forma diagonale D, la matrice P e la matrice P^{-1} (con l'algoritmo di inversione) tale che $P^{-1}BP = D$.

Si considerino le rette

$$r : \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T + t \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad s : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 7 \end{cases}$$

(A5) Scrivere l'equazione cartesiana della retta r e l'equazione parametrica della retta s.

(A6) (a) Stabilire la posizione reciproca delle rette r ed s.

(b) Determinare la retta passante per i punti di minima distanza tra le rette r ed s.

Parte B

(B1) Dimostrare che i punti $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$, $P_4(x_4, y_4, z_4)$ appartengono ad uno stesso piano se e solo se vale la seguente condizione:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} = 0.$$

(B2) Sia A una matrice reale 2×2 tale che $\operatorname{rank} A = 1$. Dimostrare che o $\operatorname{col} A^2 = \{0^2_{\mathbb{R}}\}$ oppure $\operatorname{col} A^2 = \operatorname{col} A$.