

Una dimostrazione del teorema di Cayley-Hamilton.

Teorema di Cayley-Hamilton. Sia A una matrice reale $n \times n$ e sia $c_A(x) = \det(xI_n - A) = a_0 + a_1x + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ il suo polinomio aratteristico. Allora

$$c_A(A) = a_0I_n + a_1A + a_{n-1}A^{n-1} + a_nA^n = 0_n.$$

Dimostrazione. Questa dimostrazione utilizza solamente concetti sviluppati nel secondo capitolo del testo (W.K.Nicholson, Algebra Lineare). In particolare, utilizza la nozione di *matrice aggiunta* di una matrice data (§2.2.2).

Consideriamo la matrice B , aggiunta di $xI_n - A$. Ad esempio, se $n = 2$ ed $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, allora $xI_2 - A = \begin{pmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{pmatrix}$ e quindi $B = \begin{pmatrix} x-d & b \\ c & x-a \end{pmatrix}$.

In generale, l'elemento di posto (i, j) della matrice B è $(-1)^{i+j}$ moltiplicato per il determinante della matrice ottenuta cancellando la j -esima riga e la i -esima colonna di $xI - A$. In particolare, la variabile x compare in B con un esponente minore o uguale ad $n - 1$. Quindi, esistono delle matrici reali B_i tali che :

$$B = B_0 + B_1x + \cdots + B_{n-1}x^{n-1}. \quad (1)$$

Per la formula di aggiunzione (teorema 2.2.10),

$$(xI - A)B = \det(xI - A) \cdot I = (a_0 + a_1x + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n) \cdot I.$$

Sostituendo la formula (1) nel prodotto $(xI - A)B$, sviluppando ed uguagliando le potenze di x , troviamo le relazioni:

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= I \\ B_{n-2} - AB_{n-1} &= a_1I \\ &\vdots \\ B_0 - AB_1 &= a_{n-1}I \\ -AB_0 &= a_nI. \end{aligned} \quad (2)$$

Moltiplicando le equazioni di (2) per $A^n, A^{n-1}, \dots, A, I$ e sommando, otteniamo:

$$\begin{aligned} c_A(A) &= A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I \\ &= A^n B_{n-1} + A^{n-1}(B_{n-2} - AB_{n-1}) + \cdots + A(B_0 - AB_1) - AB_0 \\ &= 0_n. \end{aligned}$$

□