**FRAME 0.1.**
- *S.M. Ross, "Calcolo delle Probabilità", Apogeo 2004.*
- *C. Mariconda, A. Tonolo, "Mat D, I parte e II parte", dispense ROSSE, Libreria Progetto, 2005.*
- *Dispensina su integrali multipli, copisteria di via Belzoni.*

**FRAME 0.2.**
- *20 giugno ore 9.30, 6 luglio ore 9.30*
- *5 settembre ore 9.30, 19 settembre ore 14.30*

**FRAME 0.3.** CONTENTS



## 1. Analisi combinatoria

### 1.1. Due principi basilari.

**FRAME 1.1.** *Si effettua un esperimento aleatorio in cui gli esiti possibili sono finiti: siano essi* $a_1, \ldots, a_n$.

- *Chiamiamo ogni* $a_i$ *un* ***evento elementare****, e l'insieme* $\Omega = \{a_1, ..., a_n\}$ *lo* ***spazio degli eventi elementari*** *o* ***spazio campionario****.*

*Scopo della combinatoria è il calcolo della cardinalità dello spazio campionario associato ad un esperimento.*

- *Chiameremo* ***evento*** *un qualunque sottoinsieme dello spazio campionario.*

**FRAME 1.2.** *Nel lancio di un dado lo spazio campionario è* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
*L'evento "esce un numero pari" è il sottoinsieme* $A = \{2, 4, 6\}$.

**FRAME 1.3.** *Diremo che* $P$ *è una* ***probabilità*** *su uno spazio campionario* $\Omega = \{a_1, ..., a_n\}$ *se*

$P$ *è una funzione che associa ad ogni sottoinsieme di* $\Omega$ *un numero reale compreso tra* $0$ *e* $1$ *con le seguenti proprietà:*

(a) $P(\emptyset) = 0$ *e* $P(\Omega) = 1$*;*
(b) *se* $A$ *e* $B$ *sono due eventi disgiunti di* $\Omega$ *(ovvero* $A \cap B = \emptyset$*) allora* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

**FRAME 1.4.** • *La probabilità $P$ si dice **uniforme** su $\Omega$ se ogni evento elementare ha la stessa probabilità, necessariamente uguale a* $\dfrac{1}{|\Omega|}$.

- *Se $P$ è una probabilità uniforme, dato un evento $A \subseteq \Omega$ si ha*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

**FRAME 1.5.** • ***Il principio di addizione.*** *Vogliamo scegliere un oggetto tra gli elementi di $m$ insiemi. Se ci sono $r_1$ oggetti distinti nel primo insieme, $r_2$ oggetti nel secondo insieme, $\ldots$, $r_m$ oggetti nell'$m$-esimo insieme, e se gli insiemi sono disgiunti, allora il numero di possibili scelte di un oggetto da uno degli $m$ insiemi è $r_1 + \cdots + r_m$.*

**FRAME 1.6.** • ***Il principio di moltiplicazione.*** *Supponiamo che un esperimento possa essere spezzato in un percorso costituito da $m$ fasi successive e che il numero degli esiti $r_i$ nella $i$-esima fase non dipenda dall'esito ottenuto nella fase precedente. Se percorsi diversi lungo le fasi successive dell'esperimento producono esiti finali distinti, allora l'esperimento ha in tutto $r_1 \times r_2 \times \cdots \times r_m$ differenti esiti.*

**FRAME 1.7.** • *Vi sono quattro persone, due donne e due uomini; si vuole formare un comitato composto da una donna e da un uomo. Quante sono le scelte possibili?*

- *Vi sono tre persone, due donne $D_1$ e $D_2$ ed un uomo $U$. Si vuole formare un comitato di due persone, una almeno delle quali sia una donna. Quante sono le scelte possibili?*

**FRAME 1.8.** *Si lanciano due dadi, uno verde l'altro rosso.*

**:** (*a*) *Quanti esiti distinti ci sono in questo esperimento?*
**:** (*b*) *Qual è la probabilità che dai due dadi escano numeri distinti?*

**FRAME 1.9.** • *Ci sono cinque libri distinti di spagnolo, sei libri distinti di francese e otto libri distinti di transilvano. In quanti modi è possibile prendere due libri in modo che non siano entrambi della stessa lingua?*

- *In quanti modi può essere formata una sequenza di tre lettere utilizzando le lettere $a, b, c, d, e, f$:*
  **:** (*a*) *con ripetizioni delle lettere utilizzate?*
  **:** (*b*) *senza ripetizioni delle lettere utilizzate?*

**:** ($c$) *senza ripetizioni e contenenti la lettera e?*
**:** ($d$) *con ripetizioni e contenenti la lettera e?*

1.2. **Sequenze e Collezioni senza ripetizione.**

**FRAME 1.10.** *Faremo sempre riferimento a due modelli ai quali molti esercizi possono essere ricondotti:*

- *l'estrazione da un'urna di $k$ palline tra $n$,*
- *la distribuzione di $k$ oggetti in $n$ scatole.*

**FRAME 1.11.** *Di volta in volta preciseremo*

- *se l'estrazione è con o senza reimmissione della pallina estratta,*
- *se terremo conto dell'ordine con cui estrarremo le palline,*
- *se le palline sono distinguibili.*

*Allo stesso modo preciseremo*

- *se le scatole devono contenere al massimo un oggetto,*
- *se gli oggetti da distribuire nelle scatole sono distinti,*
- *se le scatole sono distinguibili.*

**FRAME 1.12.** *Si tratta di due facce della stessa medaglia!*
*La terna ordinata (Rosso, Blu, Rosso) corrisponde ad un possibile esito dei seguenti due esperimenti:*

- *tre estrazioni ordinate con rimpiazzo da un'urna contenente una pallina blu ed una rossa;*
- *distribuzione dei numeri $1, 2, 3$ in due scatole, una rossa ed una blu.*

**FRAME 1.13.** *Sia $I_n = \{1, ..., n\}$.*

- *Una $k$-**sequenza**, o **sequenza di** $k$ **elementi, senza ripetizione** di $I_n$, $k \leq n$, è una $k$-upla ordinata $(a_1, ..., a_k)$ di elementi distinti di $I_n$.*

*Indichiamo con $P(n, k)$ il numero di $k$-sequenze senza ripetizione di $I_n$.*

- $P(n, n) = n! = n(n-1) \cdots 2 \times 1$;
- $P(n, k) = n(n-1) \cdots (n-(k-1)) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

**FRAME 1.14.**
- *Da un'urna contenente $n$ palline numerate da $1$ a $n$ si estraggono senza rimpiazzo $k$ palline tenendo conto dell'ordine di estrazione.*
- *Si distribuiscono $k$ oggetti distinti in $n$ scatole numerate da $1$ a $n$ inserendo al più un oggetto per scatola.*

**FRAME 1.15.** • *Una $k$-**collezione senza ripetizione** di $k$ elementi di $I_n$ è un sottoinsieme di $k \leq n$ elementi distinti $a_1$ ,..., $a_k$ di $I_n$ che indicheremo con $[a_1, ..., a_k]$.*

*Indichiamo con $C(n, k)$ il numero di $k$-collezioni senza ripetizione di $I_n$.*

- $C(n, k) = \dfrac{P(n, k)}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

**FRAME 1.16.** • *Da un'urna contenente $n$ palline numerate da $1$ a $n$ si estraggono senza rimpiazzo $k$ palline senza tener conto dell'ordine di estrazione.*

- *Si distribuiscono $k$ oggetti indistinguibili in $n$ scatole numerate da $1$ a $n$ inserendo al più un oggetto per scatola.*

1.3. **Sequenze e Collezioni con ripetizioni.**

**FRAME 1.17.** • *Una $k$-**sequenza**, o **sequenza di** $k$ **elementi**, (con ripetizioni) di $I_n$ è una $k$-upla ordinata $(a_1, ..., a_k)$ di elementi di $I_n$, eventualmente ripetuti.*

*Per il principio di moltiplicazione il numero di $k$-sequenze di $I_n$ è $n^k$.*

**FRAME 1.18.** • *Da un'urna contenente $n$ palline numerate da $1$ a $n$ si estraggono con rimpiazzo $k$ palline tenendo conto dell'ordine di estrazione.*

- *Si distribuiscono $k$ oggetti distinti in $n$ scatole numerate da $1$ a $n$.*

**FRAME 1.19.** *Sia $I_r$ l'insieme $\{1, ..., r\}$. Siano poi $n_1, ..., n_r, n$ numeri naturali tali che $n_1 + ... + n_r = n$.*

- *Indichiamo con $P(n; n_1, ..., n_r)$ il numero di $n$-sequenze di $I_r$ con $n_1$ elementi uguali ad $1$, $n_2$ elementi uguali a $2$, ..., $n_r$ elementi uguali ad $r$.*
- $P(n; n_1, n_2, \ldots, n_r) = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$.

**FRAME 1.20.** • *Da un'urna contenente $n$ palline, di cui $n_1$ di colore 1, $n_2$ di colore 2, ..., $n_r$ di colore $r$ con $n = n_1 + ... + n_r$, si estraggono tutte le palline tenendo conto dell'ordine di estrazione.*

- *Si distribuiscono $n$ oggetti distinti in $n$ scatole, di cui $n_1$ di colore 1, $n_2$ di colore 2, ..., $n_r$ di colore $r$ con $n = n_1 + ... + n_r$ inserendo un oggetto per scatola.*

**FRAME 1.21.** • *Una $k$-**collezione** (con ripetizioni) di $k$ elementi di $I_n$ è una famiglia $[a_1, ..., a_k]$ di $k$ elementi di $I_n$ con elementi eventualmente ripetuti.*

**FRAME 1.22.**

- *Da un'urna contenente $n$ palline numerate da 1 a $n$ si estraggono con rimpiazzo $k$ palline senza tener conto dell'ordine di estrazione.*
- *Si distribuiscono $k$ oggetti indistinguibili in $n$ scatole numerate da 1 a $n$.*

**FRAME 1.23.**

- *Il numero di $k$-collezioni di $I_n$ è uguale al numero di $n$-uple $(x_1, ..., x_n)$ di interi naturali maggiori od uguali a zero tali che $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$.*
- *Il numero di $k$-collezioni di $I_n$ o, equivalentemente, il numero di $n$-uple $(x_1, ..., x_n)$ di interi naturali (0 incluso) tali che $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$, è pari a*

$$P(n-1+k; k, n-1) = C(k+n-1, k) = C(k+n-1, n-1).$$