FRAME 0.1. *Siano E_1, E_2, ..., E_n degli eventi, ovvero dei sottoinsiemi di uno spazio campionario S.*

Le operazioni insiemistiche "$\cup$" e "$\cap$" godono delle proprietà commutativa ed associativa; inoltre

$$(E_1 \cup E_2)E_3 = E_1E_3 \cup E_2E_3, \quad E_1E_2 \cup E_3 = (E_1 \cup E_3)(E_2 \cup E_3).$$

Leggi di De Morgan

$$(\bigcup_{i=1}^{n} E_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} E_i^c, \quad (\bigcap_{i=1}^{n} E_i)^c = \bigcup_{i=1}^{n} E_i^c.$$

FRAME 0.2. *...è molto probabile che ...*
... è poco probabile che ...

- *La probabilità registra la frequenza di un evento.*
- *Dato un evento $E \subseteq S$, bisogna che*

$$P(E) = n(E)/n, \qquad n >> 0.$$

Costruiremo una teoria assiomatica della probabilità, e poi ne testeremo la validità dimostrando

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(E)}{n} = P(E).$$

0.1. **Assiomi della probabilità.**

FRAME 0.3. *Sia P una funzione definita sull'insieme degli eventi a valori reali. Diciamo che P è una* ***probabilità*** *se verifica*

Assioma 1 $0 \leq P(E) \leq 1$.

Assioma 2 $P(S) = 1$.

Assioma 3 *Per ogni successione di eventi E_1, ..., E_n, ... a due a due disgiunti si ha*

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i).$$

- *Definiamo $P(E)$ la probabilità dell'evento E.*

FRAME 0.4. *Sia $E_1 = S$, $\emptyset = E_2 = E_3 = ...$ Allora*

$$P(S) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = P(S) + \sum_{i=2}^{\infty} P(\emptyset);$$

pertanto

- $P(\emptyset) = 0$, *e*
- $P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$.

FRAME 0.5. *Se lo spazio campionario è un insieme infinito più che numerabile (come ad esempio i numeri reali), la funzione probabilità potrebbe non essere definibile su tutti gli eventi, ma solo su alcuni di essi detti* eventi misurabili.

- *"Tutti" gli eventi di interesse pratico risultano effettivamente sottoinsiemi misurabili.*

FRAME 0.6. *Siano E ed F due eventi di uno spazio campionario S.*

- $P(E^c) = 1 - P(E)$;
- *se* $E \subseteq F$, *allora* $P(E) \leq P(F)$;
- $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$

Più in generale vale il Principio di inclusione/esclusione*:*

- $P(E_1 \cup ... \cup E_n) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i_1<i_2} P(E_{i_1}E_{i_2}) +$
  $+ \sum_{i_1<i_2<i_3} P(E_{i_1}E_{i_2}E_{i_3}) - ... + (-1)^{n+1} P(E_1E_2...E_n)$.

FRAME 0.7.
- *N uomini durante una festa in costume gettano il proprio cappello nel centro della sala. I cappelli vengono mescolati e poi ogni uomo ne sceglie uno a caso. Supponendo di adoperare la funzione di probabilità uniforme, qualè la probabilità che*
  1. *nessuno degli uomini scelga il proprio cappello;*
  2. *esattamente k di essi scelgano il proprio cappello.*

0.2. **Probabilità come funzione di insieme continua.**

FRAME 0.8. *Sia $\{E_i : i \in \mathbb{N}\}$ una successione di eventi uno contenuto nell'altro:*

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq ... \subseteq E_n \subseteq ...$$

Possiamo considerare "il limite" di tale successione

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$$

Che relazione c'e' tra la probabilità degli eventi E_i e quella della loro unione?

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{i\to\infty} P(E_i).$$

FRAME 0.9. *Analogamente se $\{G_i : i \in \mathbb{N}\}$ è una successione di eventi uno contenente l'altro:*

$$G_1 \supseteq G_2 \supseteq ... \supseteq G_n \supseteq ...$$

si ha

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i) = \lim_{i\to\infty} P(G_i).$$

1. Probabilità condizionata ed indipendenza

FRAME 1.1. *Ho lanciato un dado. Qual'è la probabilità che sia uscito il numero 4?Ovviamente* 1/6.

Se peró vi dico che il numero uscito è pari?Ovviamente la probabilità sale ad 1/3.

Se peró vi dico che il numero uscito è dispari?Ovviamente la probabilità crolla a 0.

$$P(\textit{uscito } 4) = 1/6, \quad P(\textit{pari}) = 1/2,$$
$$P(\textit{uscito } 4|\ \textit{pari}) = \frac{P(\textit{uscito } 4 \textit{ e un numero pari})}{P(\textit{pari})}$$

$$P(\textit{uscito } 4) = 1/6, \quad P(\textit{dispari}) = 1/2,$$
$$P(\textit{uscito } 4|\ \textit{dispari}) = \frac{P(\textit{uscito } 4 \textit{ e un numero dispari})}{P(\textit{dispari})}$$

FRAME 1.2. *Siano E ed F due eventi. Se $P(F) \neq 0$, allora diciamo*

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}.$$

Si ha cosí che $P(EF) = P(F)P(E|F)$.

Esempi

- *Ci sono 25 lampadine in un cassetto delle quali 5 rotte, 8 che si romperanno nel giro di un giorno e 12 in ottimo stato. Ne prendiamo una a caso; sapendo che si accende, qual'è la probabilità che continui a funzionare anche domani?*
- *Da un urna contenente 8 palline rosse e 4 bianche si estraggono in successione due palline. Qual'è la probabilità che entrambe siano rosse?*

FRAME 1.3. ***Regola del prodotto***

Se $P(E_1E_2...E_n) > 0$, allora

$$P(E_1E_2...E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2)...P(E_n|E_1E_2...E_{n-1}).$$

Esempio *Suddividiamo un mazzo di 52 carte in 4 mazzetti da 13 carte. Calcolare la probabilità che ciascuno di essi contenga un asso.*

1.1. La formula di Bayes.

FRAME 1.4. *Siano E ed F due eventi. Essendo $F \cup F^c = S$, si ha*

$$E = EF \cup EF^c$$

e quindi essendo eventi disgiunti

$$P(E) = P(EF) + P(EF^c) = P(F)P(E|F) + P(F^c)P(E|F^c) =$$
$$= P(F)P(E|F) + (1 - P(F))P(E|F^c).$$

FRAME 1.5. *Siano F_1, F_2, ..., F_n eventi a due a due disgiunti tali che*

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} F_i.$$

Allora, dato un evento E, si ha

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} EF_i,$$

quindi

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(EF_i) = \sum_{i=1}^{n} P(F_i)P(E|F_i).$$

FRAME 1.6. *Vale la **formula di Bayes**:*

$$P(F_j|E) = \frac{P(F_jE)}{P(E)} = \frac{P(F_J)P(E|F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(F_i)P(E|F_i)}.$$

FRAME 1.7. *Usando la definizione $P(E|F) = \dfrac{P(EF)}{P(F)}$ si ottiene*

$$P(F)P(E|F) = P(EF) = P(E)P(F|E).$$

Utilizzando ora l'una ora l'altra spesso ci si toglie d'impaccio.

Esercizio *Un aereo è scomparso e si presume che sia finito con uguale probabilità in una di 3 possibili zone R_1, R_2 ed R_3. La probabilità di riuscire a rintracciare l'aereo nella zona R_i, se davvero l'aereo vi ci si trova, è pari a γ_i. Sapendo che le ricerche nella zona R_1 hanno dato esito negativo, qual'è la probabilità che l'aereo si trovi nella zona R_i, $i = 1, 2, 3$?*

1.2. **Eventi indipendenti.**

FRAME 1.8. *Siano E ed F due eventi. Essi sono detti **indipendenti** se*

$$P(EF) = P(E)P(F).$$

Se $P(F) > 0$ questo è equivalente a dire che $P(E|F) = P(E)$;se $P(E) > 0$ questo è equivalente a dire che $P(F|E) = P(F)$.

*Tre eventi E, F, G si dicono **indipendenti** se*

(1) $P(EFG) = P(E)P(F)P(G)$,
(2) $P(EF) = P(E)P(F)$,
(3) $P(EG) = P(E)P(G)$,
(4) $P(FG) = P(F)P(G)$.

Esercizio *Lanciamo un dado numerato come al solito. Gli eventi esce 3 ed esce 5 sono indipendenti? e gli eventi esce 8 ed esce 5?*

FRAME 1.9. ***Teorema*** *La funzione $Q = P(-|F)$ è una probabilità.*

Essa soddisfa

(1) $0 \leq Q(E) \leq 1$,
(2) $Q(S) = 1$,
(3) *Se E_i, $i = 1, ..., n, ...$ sono eventi a due a due disgiunti, allora*

$$Q(\bigcup_{i=1}^{infty} E_i) = \sum_{i=1}^{infty} Q(E_i).$$

Si osservi come, dati due eventi E e G, si ha

$$Q(E) = Q(E|G)Q(G) + Q(E|G^c)Q(G^c),$$

ovvero

$$P(E|F) = P(E|GF)P(G|F) + P(E|G^cF)P(G^c|F).$$