FRAME 0.1. CONTENTS

1. VARIABILI ALEATORIE

1.1. **Introduzione.**

FRAME 1.1. ***Definizione*** *Diciamo* variabile aleatoria *una funzione definita sullo spazio campionario di un esperimento a valori reali.*

Esempio. *Lanciamo tre monete una dopo l'altra registrando se esce testa o croce. Lo spazio campionario associato a tale esperimento è*

$$\{(C,C,C),(T,T,T),(C,T,T),(T,C,T),(T,T,C),$$

$$(T,C,C),(C,T,C),(C,C,T)\}$$

Il giocatore A vince se escono più teste altrimenti perde.

FRAME 1.2. *Ovvero A vince se, indicata con τ la funzione che conta il numero di teste in un evento elementare, e con E l'evento elementare verificatosi, si ha*

$$\tau(E) \geq 2.$$

La funzione τ è una variabile aleatoria.

FRAME 1.3. *Chiaramente*

$$\tau^{-1}(2) = \{(C,T,T),(T,C,T),(T,T,C)\}$$

L'evento $\{(C,T,T),(T,C,T),(T,T,C)\}$ ha probabilità uniforme $3/8$; diremo allora che la probabilità che escano due teste è pari a $3/8$.

$$P\{\tau = 2\} = P(\tau^{-1}(2)) = P(\{(C,T,T),(T,C,T),(T,T,C)\}) = \frac{3}{8}.$$

In generale se X è una variabile aleatoria definita su uno spazio campionario S, allora poniamo

$$P\{X = a\} = P(X^{-1}(a)).$$

FRAME 1.4. *Estraiamo 3 palline da un'urna contenente 20 palline numerate da 1 a 20. Qualè la probabilità che il massimo dei numeri astratti sia maggiore od uguale a 17?*

FRAME 1.5. *Data una variabile aleatoria X, diciamo* funzione di distribuzione *o* di ripartizione *di X la funzione di variabile reale*

$$F(x) = P\{X \leq x\}.$$

Evidentemente F è una funzione non decrescente.

Ad esempio, se F è la distribuzione della variabile aleatoria che conta il numero di teste nel lancio successivo di tre monete, si ha

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \textit{se } 0 \leq x < 1 \ , \\ \frac{4}{8} & \textit{se } 1 \leq x < 2, \\ \frac{7}{8} & \textit{se } 2 \leq x < 3 \ , \\ 1 & \textit{se } 3 \leq x \ . \end{cases}$$

FRAME 1.6. *Due variabili aleatorie definite sullo stesso spazio degli eventi si dicono* indipendenti *se, comunque dati due sottoinsiemi A e B di $\mathbb{R}$, si ha*

$$P\{X \in A, Y \in B\} = P\{X \in A\}P\{X \in B\},$$

ovvero se gli eventi

- $X^{-1}(A) =: \{X \in A\}$, *e*
- $Y^{-1}(B) =: \{Y \in B\}$

sono indipendenti.

1.2. **Variabili aleatorie discrete.**

FRAME 1.7. ***Definizione*** *Diciamo* discreta *una variabile aleatoria che assume una quantità al più numerabile di valori.*

Definizione *Diciamo* densità discreta *di una variabile aleatoria discreta X la funzione di variabile reale*

$$p(a) := P\{X = a\}.$$

Se X assume i soli valori $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$, allora

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} p(x_i) = 1.$$

Esempio*.*

Sia X la variabile aleatoria che conta il numero di teste nel lancio successivo di tre monete. Chiaramente

$$p(0) = 1/8; \quad p(1) = 3/8; \quad p(2) = 3/8; \quad p(3) = 1/8.$$

FRAME 1.8. ***Esempio***. *Supponiamo che la densità discreta di una variabile X sia*

$$p(i) = c\lambda^i/i!, \qquad i = 0, 1, 2, ...$$

dove c è un parametro da determinare e λ una costante positiva.

- *Si determini c;*
- *si calcolino $P\{X = 0\}$ e $P\{X \geq 2\}$.*

1.3. **Valore atteso (Media) e Varianza.**

FRAME 1.9. ***Definizione*** *Sia X una variabile aleatoria discreta con densità discreta $p(x)$. Diciamo* valore atteso *di X il numero reale*

$$E[X] = \sum_{x:p(x)>0} xp(x).$$

Esempio. *Si calcoli il valore atteso del numero di teste uscite nel lancio successivo di tre monete.*

FRAME 1.10. *Sia X una variabile aleatoria discreta con densità p, e g una funzione reale di variabile reale.Qualè il valore atteso di $g(X)$?*

$$E[g(X)] = \sum_i y_i P\{g(X) = y_i\} = \sum_i y_i (\sum_{j:g(x_j)==y_i} p(x_j)) =$$

$$\sum_j g(x_j)p(x_j)$$

In particolare

- $E[X^2] = \sum_j x_j^2 p(x_j)$;
- $E[aX + b] = \sum_j (ax_j + b)p(x_j) = a\sum_j x_j p(x_j) + b\sum_j p(x_j) = aE[X] + b$.
- *Se Y_i, $i = 1, ..., n$, sono variabili aleatorie allora*

$$E[Y_1 + ... + Y_n] = E[Y_1] + ... + E[Y_n].$$

FRAME 1.11. *Se $E[X] = \mu$ è la combinazione convessa dei valori ottenibili da X, ovvero la media, di quanto variano rispetto ad $E[X]$ i valori assunti da X? ovvero, che variazione ci attendiamo di X dalla media?*

$$E[|X - \mu|] \text{ potrebbe misurare la “media” delle variazioni}$$

Definizione *Si definisce* varianza *di X il valore*

$$Var(X) := E[(X - \mu)^2]$$

FRAME 1.12. *Si ha*

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (x-\mu)^2 p(x) = \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2) p(x) =$$

$$= \sum_x x^2 p(x) - 2\mu \sum_x x p(x) + \mu^2 \sum_x p(x) =$$

$$= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2 = E[X^2] - \mu^2 = E[X^2] - E[X]^2.$$

FRAME 1.13. *Diciamo* deviazione standard σ_X *di* X *la radice quadrata della varianza di* X*:*

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}.$$

FRAME 1.14. *Dimostriamo che* $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$*:*

$$Var(aX+b) = E[(aX+b-a\mu-b)^2] =$$

$$= E[a^2(X-\mu)^2] = a^2 E[(X-\mu)^2] = a^2 Var(X).$$

Se Y_i*,* $i = 1, ..., n$*, sono variabili aleatorie indipendenti allora*

$$Var(Y_1 + ... + Y_n) = Var(Y_1) + ... + Var(Y_n).$$

1.4. **Variabili aleatorie binomiali e di Poisson.**

FRAME 1.15. *Si esegue un esperimento i cui esiti possono essere definiti come successi o insuccessi. Ponendo* $X = 1$ *se abbiamo un successo e* $X = 0$ *in caso di insuccesso, definiamo una variabile aleatoria discreta di* Bernoulli.*La sua densità discreta è del tipo*

$$p(0) = P\{X=0\} = 1-p, \quad p(1) = P\{X=1\} = p,$$

dove p *rappresenta la probabilità che l'esperimento abbia successo.*

FRAME 1.16. *Se l'esperimento consiste di* n *prove identiche, ciascun esito delle quali può essere un successo con probabilità* p *o un insuccesso (necessariamente con probabilità* $1-p$*), la variabile* X *che conta il numero di successi è detta* variabile binomiale di parametri (n, p).*La variabile binomiale di parametri* (n, p) *è la somma di* n *variabili di Bernoulli indipendenti.La densità discreta di* X *è del tipo*

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \quad i = 0, 1, ..., n$$

FRAME 1.17. *Lanciamo un dado* 15 *volte consecutivamente.Ciascun lancio decreta un successo se esce 5 o 6, decreta invece un insuccesso altrimenti.Si tratta di una binomiale di parametri* $(15, 1/3)$*.*

La sua densità discreta è

$$p(i) = \binom{15}{i} \frac{1}{3^i} \left(\frac{2}{3}\right)^{15-i} \qquad i = 0, 1, ..., 15$$

FRAME 1.18. *Il valore atteso di una Bernoulli X di parametro p è*

$$0p(0) + 1p(1) = 0(1-p) + 1p = p.$$

Pertanto il valore atteso di una binomiale Y di parametri (n, p), essendo somma di n Bernoulli di parametro p, è

$$E[Y] = np.$$

FRAME 1.19. *La varianza di una Bernoulli X è*

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] - p^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

La varianza di una binomiale Y, essendo somma di n Bernoulli di parametro p, è

$$Var(Y) = np(1-p).$$

FRAME 1.20. *Una variabile aleatoria che assume i valori 0,1,2,3, ... è detta di* Poisson *con parametro λ, $0 < \lambda \in \mathbb{R}$, se ha densità discreta*

$$p(i) = P\{X = i\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, 3, ...$$

Si osservi che

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

La variabile di Poisson X ha valore atteso e varianza uguali al suo parametro λ.

FRAME 1.21. *Se X è una variabile binomiale di parametri (n, p), posto $\lambda = np$ si ha*

$$P\{X = i\} = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = \binom{n}{i} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-i} =$$

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{n^i} \frac{\lambda^i}{i!} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^i}$$

Per $n >> 0$ e p piccolo si ha

- $(1-\lambda/n)^n \approx e^{-\lambda}$,
- $\frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{n^i} \approx 1$,
- $(1-\lambda/n)^i \approx 1$.

Dunque $P\{X = i\} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}$.

FRAME 1.22. *Insomma Poisson ben approssima il conteggio di quante volte un fenomeno avviene se sappiamo che il fenomeno avviene di rado, ed indipendentemente da quanto sino a quel momento e' successo.Tipico è il caso di un accesso ad un servizio disponibile a molte persone, ciascuna delle quali ne usufruisce raramente.O ancora un fenomeno di breve durata che può avvenire nel tempo.*

Esempio *Voglio avere un'idea della probabilità che vi siano almeno 3 terremoti nelle prossime due settimane in California, sapendo che mediamente ce ne sono 2 alla settimana.*