1. Variabili aleatorie continue

1.1. Introduzione.

FRAME 1.1. ***Definizione*** *Diciamo che X è una* variabile aleatoria continua *se esiste una funzione continua f di variabile reale a valori reali non negativi, tale che per ogni sottoinsieme B di $\mathbb{R}$ si abbia*

$$P\{X \in B\} = \int_B f(x)dx.$$

La funzione f è detta densità *della variabile aleatoria X.*
Necessariamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

FRAME 1.2.
- $P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f(x)dx;$
- $P\{X = a\} = \int_a^a f(x)dx = 0;$
- $P\{X \geq a\} = 1 - P\{X \leq a\};$
- $P\{X \leq a\} = P\{X < a\} = \int_{-\infty}^a f(x)dx = F(a).$

La funzione F è la funzione di distribuzione o ripartizione *di X.Si ha* $\frac{d}{da}F(a) = f(a)$.

FRAME 1.3. ***Esempio*** *Determinare il parametro λ che rende*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x/100} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

una densità di una variabile continua X. Supponiamo che tale variabile misuri la durata in ore di un calcolatore. Determinare la probabilità che il computer si blocchi esattamente dopo 100 ore;e che si blocchi prima di 100 ore?

FRAME 1.4. ***Esempio*** *Il tempo di vita di un dato tipo di pile per la radio è una variabile aleatoria la cui densità è*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 100, \\ \frac{100}{x^2} & x > 0. \end{cases}$$

Determinare la probabilità che esattamente due pile su 5 debbano essere sostituite entro le 150 ore di attività (supponendo la durata delle singole pile tra loro indipendenti).

FRAME 1.5. *Sia X una variabile aleatoria continua con densità f. Il* valore atteso *di X è*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx.$$

Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione ... allora

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx.$$

La varianza si definisce sempre in funzione del valore atteso:

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

FRAME 1.6. ***Esempio***. *Supponete che arrivare s minuti in anticipo ad un appuntamento comporti un costo di cs euro (o ... credibilità), mentre arrivare in ritardo di s minuti comporti un costo di ks euro.Il tempo di viaggio per raggiungere il luogo dell'appuntamento è una variabile aleatoria X di densità f. Determinare quanto tempo prima dell'appuntamento dovete partire per minimizzare il valore atteso del costo.*

1.2. **La variabile aleatoria uniforme.**

FRAME 1.7. *Una variabile aleatoria è detta* uniforme *o* uniformemente distribuita *sull'intervallo $[a, b]$ se la sua densità è*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & se\ a \le x \le b, \\ 0 & altrimenti. \end{cases}$$

Esempio *L'autobus passa alle 7:00, 7:15, 7:30, ...ogni 15 minuti.Se voi arrivate a caso alla fermata tra le 7:00 e le 7:30, determinare la probabilità che attendiate l'autobus*

- *meno di 5 minuti;*
- *più di 10 minuti.*

Determinare il valore atteso ... dell'attesa.

1.3. **La variabile aleatoria normale.**

FRAME 1.8. *Diciamo che X è una variabile aleatoria* normale, *o che X è* distribuita normalmente, *con parametri μ e σ^2 se la sua densità è*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Il grafico di f è a campana, simmetrico rispetto a μ.

FRAME 1.9. *Una variabile aleatoria normale di parametri μ e σ^2 ha valore atteso uguale a μ e varianza uguale a σ^2. Pertanto σ rappresenta la sua deviazione standard.*

FRAME 1.10. *Sia X una variabile normale di parametri μ e σ^2. Si consideri $Y = \alpha X + \beta$: ebbene Y è pure una variabile aleatoria normale ed i suoi parametri sono*

$$\mu' = \alpha\mu + \beta \ \text{e}\ (\sigma')^2 = \alpha^2\sigma^2.$$

Se X è una variabile normale di parametri μ e σ^2, allora

$$Z = (1/\sigma)X - (\mu/\sigma) = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

ha parametri 0, 1.

FRAME 1.11. *Una tale variabile normale Z è detta* standard *e la sua funzione di distribuzione, tradizionalmente indicata con la lettera Φ, è*

$$\Phi_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy.$$

FRAME 1.12. *I valori di $\Phi(x)$ con $x \geq 0$ sono indicati in una tabella.*

Utilizzando il fatto che per motivi di simmetria

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

si ottengono tutti i valori.

Data una variabile aleatoria normale X di parametri μ e σ^2 si ha

$$F_X(a) = P\{X \leq a\} = P\{\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\} = \Phi(\frac{a - \mu}{\sigma}).$$

FRAME 1.13. *Sia X una variabile normale di parametri $\mu = 3$ e $\sigma^2 = 9$. Calcolare $P\{2 < X < 5\}$.*

FRAME 1.14. ***Teorema di De Moivre - Laplace*** *Sia S_n il numero di successi che si realizzano in n prove indipendenti, in ognuna delle quali il successo ha probabilità p. Allora per ogni $a < b$,*

$$P\{a \leq S_n \leq b\} = P\{\frac{a - np}{\sqrt{np(p-1)}} \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(p-1)}} \leq \frac{b - np}{\sqrt{np(p-1)}}\}$$

tende per $n \to \infty$ a

$$\Phi(\frac{b - np}{\sqrt{np(p-1)}}) - \Phi(\frac{a - np}{\sqrt{np(p-1)}}).$$

Ovvero per $n \to \infty$ la binomiale tende ad una variabile normale.

FRAME 1.15. *Si usa l'approssimazione di Poisson quando n è grande, pè piccolo e $np \approx np(1-p)$ è piccolo, mentre si usa la normale quando n è grande, p è piccolo e $np(1-p)$ è grande.*

FRAME 1.16. *Sia X il numero di volte che esce testa nel lancio di una moneta equilibrata lanciata 40 volte. Determinare la probabilità che $X = 20$.*

FRAME 1.17. ***Il teorema del limite centrale*** *Sia X_1, X_2, ... una successione di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite, ognuna di media μ e varianza σ^2. Allora la distribuzione di*

$$\frac{X_1 + ... + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

tende a quella di una variabile aleatoria normale standard per $n \to \infty$. Ovvero, per $-\infty < a < \infty$ si ha

$$P\{\frac{X_1 + ... + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2} dx$$

per $n \to \infty$.

1.4. **La variabile esponenziale.**

FRAME 1.18. *Una variabile aleatoria si dice* esponenziale *di parametro $\lambda > 0$ se la sua densità è*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \textit{se } x \geq 0, \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

La funzione di distribuzione di una esponenziale X calcolata in $a \geq 0$ è

$$F(a) = P\{X \leq a\} = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx =$$
$$= -e^{-\lambda x}|_0^a = 1 - e^{-\lambda a}.$$

Il valore atteso di una esponenziale di parametro λ è $1/\lambda$ e la sua varianza è $1/\lambda^2$.

FRAME 1.19. *Diciamo che una variabile aleatoria X è* senza memoria *se*

$$P\{X > s + t \mid X > t\} = P\{X > s\} \quad \textit{per ogni } s, t \geq 0.$$

Questo equivale a dire

$$\frac{P\{X > s + t,\ X > t\}}{P\{X > t\}} = P\{X > s\}, \quad \textit{ovvero}$$

$$P\{X > s + t\} = P\{X > t\}P\{X > s\} \quad \textit{per ogni } s, t \geq 0,$$

o, in termini della funzione di distribuzione,

$$1 - F_X(s + t) = (1 - F_X(s))(1 - F_X(t)).$$

La variabile esponenziale di parametro λ, che ricordiamo ha distribuzione $F_X(a) = 1 - e^{-\lambda a}$, è l'unica ad essere senza memoria!