

FRAME 0.1. CONTENTS

1.	Analisi combinatoria	1
2.	Assiomi della probabilità	1
3.	Probabilità condizionata ed indipendenza	1
4.	Variabili aleatorie discrete	1
5.	Variabili aleatorie continue	1
6.	Leggi congiunte	1
6.1.	Introduzione	1

1. ANALISI COMBINATORIA

2. ASSIOMI DELLA PROBABILITÀ

3. PROBABILITÀ CONDIZIONATA ED INDIPENDENZA

4. VARIABILI ALEATORIE DISCRETE

5. VARIABILI ALEATORIE CONTINUE

6. LEGGI CONGIUNTE

6.1. Introduzione.

FRAME 6.1. Siano X ed Y due variabile aleatorie. Diciamo funzione di distribuzione congiunta di X ed Y la funzione in due variabili

$$F(a, b) = P\{X \leq a, Y \leq b\}, \quad -\infty \leq a, b \leq \infty.$$

Se X ed Y sono indipendenti, allora la loro distribuzione congiunta è

$$F(a, b) = F_X(a) \cdot F_Y(b), \quad -\infty \leq a, b \leq \infty.$$

FRAME 6.2. In generale, la funzione di distribuzione della X si può ricavare dalla F :

$$\begin{aligned}
 F_X(a) &= P\{X \leq a\} \\
 &= P\{X \leq a, Y < \infty\} \\
 &= P\{\bigcup_{b=1}^{\infty} \{X \leq a, Y < b\}\} \\
 &= P\{\lim_{b \rightarrow \infty} \{X \leq a, Y < b\}\} \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} P\{X \leq a, Y < b\} \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} F(a, b) \\
 &= F(a, \infty).
 \end{aligned}$$

FRAME 6.3. Analogamente

$$F_Y(b) = \lim_{a \rightarrow \infty} F(a, b) = F(\infty, b).$$

Le funzioni F_X e F_Y sono dette le funzioni di distribuzione marginali di X e Y .

$$\begin{aligned} P\{X > a, Y > b\} &= 1 - P\{(X > a, Y > b)^c\} \\ &= 1 - P\{(X > a)^c \cup (Y > b)^c\} \\ &= 1 - [P\{(X \leq a)\} + P\{(Y \leq b)\} - \\ &\quad - P\{X \leq a, Y \leq b\}] \\ &= 1 - F_X(a) - F_Y(b) + F(a, b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Più in generale } P\{a_1 < X \leq a_2, b_1 < Y \leq b_2\} &= \\ &= F(a_2, b_2) + F(a_1, b_1) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1). \end{aligned}$$

FRAME 6.4. È utile definire la densità congiunta

$$p(a, b) = P\{X = a, Y = b\}.$$

Chiaramente si ha

$$\sum_x \sum_y p(x, y) = 1,$$

somme fatte sui valori assunti da X e da Y , rispettivamente.

Se X ed Y sono variabili discrete indipendenti, allora

$$p(a, b) = p_X(a)p_Y(b).$$

In generale, la densità discreta di X può essere ottenuta da p :

$$p_X(a) = P\{X = a\} = \sum_{y: p(a, y) > 0} p(a, y).$$

Analogamente

$$p_Y(b) = P\{Y = b\} = \sum_{x: p(x, b) > 0} p(x, b).$$

FRAME 6.5. Esempio. Estraiamo a caso 3 palline da un'urna contenente 3 palline rosse, 4 bianche e 5 blu. Se X conta quante palline rosse abbiamo estratto e Y conta quante palline bianche abbiamo estratto, determinare la densità congiunta di X e Y . Dedurre dalla densità congiunta la densità marginale di X ed in particolare il suo valore in 2.

FRAME 6.6. Le variabili aleatorie X ed Y sono dette congiuntamente continue se esiste una funzione $f(x, y)$ integrabile tale che “per ogni” sottoinsieme C di $\mathbb{R}^2$ si abbia

$$P\{(X, Y) \in C\} = \iint_C f(x, y) dx dy.$$

La funzione f è detta densità congiunta di X ed Y .

FRAME 6.7. *Distribuzione congiunta e densità congiunta sono legate, come ci aspettiamo:*

$$F(a, b) = P\{X \leq a, Y \leq b\} = \int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^a f(x, y) dx dy,$$

e quindi differenziando

$$f(a, b) = \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} F(a, b).$$

FRAME 6.8. *Se X ed Y sono congiuntamente continue, allora lo saranno anche individualmente:*

$$F_X(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy$$

e quindi la densità marginale di X è

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy.$$

FRAME 6.9. *Le variabili X ed Y sono indipendenti se e solo se*

$$P\{X \leq a, Y \leq b\} = P\{X \leq a\}P\{Y \leq b\},$$

ovvero se e solo se

$$F(a, b) = F_X(a)F_Y(b).$$

In termini della densità, X ed Y sono indipendenti se e solo se

- $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$, nel caso discreto;
- $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$, nel caso di variabili congiuntamente continue.

FRAME 6.10. *Di più, si dimostra che due variabili aleatorie sono indipendenti se e solo se la loro densità congiunta è prodotto di due funzioni di una variabile.*

Esempio *Se la densità congiunta di X ed Y è*

$$f(x, y) = 6e^{-2x}e^{-3y} \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty,$$

ed è uguale a zero altrove, le variabili sono indipendenti? e se

$$f(x, y) = 24xy \quad \text{ogniqualevolta } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < x + y < 1,$$

e zero altrove, sono ancora indipendenti?

FRAME 6.11. *Siano X ed Y variabili aleatorie indipendenti discrete con densità p_X e p_Y rispettivamente. Allora*

$$P\{X + Y = a\} = \sum_{x+y=a} p_X(x)p_Y(y) = \sum_x p_X(x)p_Y(a-x).$$

In termini di distribuzioni

$$P\{X + Y \leq a\} = F_{X+Y}(a) = \sum_{x+y \leq a} p_X(x)p_Y(y) =$$

$$= \sum_x \sum_{y \leq a-x} p_X(x) p_Y(y).$$

FRAME 6.12. Se invece X ed Y sono variabili aleatorie indipendenti continue con densità f_X e f_Y , si ha

$$\begin{aligned} P\{X + Y \leq a\} &= F_{X+Y}(a) = \iint_{x+y \leq a} f_X(x) f_Y(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a-x} f_X(x) f_Y(y) dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{a-x} f_Y(y) dy \right] f_X(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(a-x) f_X(x) dx. \end{aligned}$$

FRAME 6.13. La distribuzione F_{X+Y} è detta convoluzione delle distribuzioni F_X e F_Y . Differenziando otteniamo

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(a) &= \frac{d}{da} \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(a-x) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{da} F_Y(a-x) f_X(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(a-x) f_X(x) dx. \end{aligned}$$

FRAME 6.14. Abbiamo osservato che la somma di due variabili di Poisson indipendenti di parametri λ_1 e λ_2 è una variabile di Poisson di parametro $\lambda_1 + \lambda_2$.

Proposizione La somma di due variabili binomiali X ed Y di parametri (n, p) ed (m, p) è una binomiale di parametri $(m+n, p)$.

FRAME 6.15. Proposizione Se $X_1, \dots, X_n$ sono variabili normali indipendenti di parametri $\mu_i, \sigma_i^2, i = 1, \dots, n$, allora

$$X_1 + \dots + X_n$$

è una variabile normale di parametri $\sum_i \mu_i$ e $\sum_i \sigma_i^2$.