

FRAME 0.1. CONTENTS

1. Prime Nozioni	1
1.1. Definizione	1
1.2. Il grado dei vertici	3
1.3. Sottografi	3
2. Percorsi e connessione	4
2.1. Percorsi	4
2.2. Cicli	5
2.3. Isomorfismi	6
3. Alberi	6
3.1. Grafi molto ... naturali	6
4. Percorsi di Eulero	7
4.1. Grafi euleriani	7
5. Grafi a colori	7
5.1. La k -colorazione	7

1. PRIME NOZIONI

1.1. Definizione.

FRAME 1.1. Un **grafo semplice** è una coppia $(V(G), E(G))$ costituita da un insieme non vuoto $V(G)$ i cui elementi sono detti **vertici** e da un insieme $E(G)$ di coppie non ordinate $[u, v]$ di vertici distinti u e v , dette **lati** di G . I vertici che appartengono ad un lato sono detti **estremi** del lato stesso. Il lato $[u, v]$ sarà anche più brevemente indicato con uv .

FRAME 1.2. La coppia $G = (V(G), E(G))$ dove

$$V(G) = \{1, 2, 3\}, \quad E(G) = \{12, 23, 13\}$$

è un grafo semplice.

FRAME 1.3. Un **grafo** G è una terna $(V(G), E(G), \psi_G)$ costituita da un insieme non vuoto di elementi detti **vertici**, un insieme $E(G)$ di elementi detti **lati**, ed una funzione ψ_G detta **funzione di incidenza** che associa ad ogni lato in $E(G)$ una coppia non ordinata di vertici (non necessariamente distinti) detti **estremi** del lato.

Il numero di vertici ed il numero di lati verranno indicati rispettivamente con $\nu(G)$ e $\varepsilon(G)$ o semplicemente con ν ed ϵ .

Noi studieremo grafi finiti, cioè grafi con un numero finito di vertici e lati.

FRAME 1.4. Una **rappresentazione di un grafo** è un sottoinsieme del piano ottenuto indicando ciascun vertice v con un punto e ciascun lato e con un arco semplice che collega i due punti che rappresentano i suoi estremi.

FRAME 1.5. Si rappresenti graficamente il grafo $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ dove

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \quad E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$$

e ψ_G è definita da:

$$\begin{aligned} \psi_G(e_1) &= [v_1, v_2], \quad \psi_G(e_2) = [v_2, v_3], \quad \psi_G(e_3) = [v_3, v_3], \\ \psi_G(e_4) &= [v_3, v_4], \quad \psi_G(e_5) = [v_2, v_4], \quad \psi_G(e_6) = [v_4, v_5], \\ \psi_G(e_7) &= [v_2, v_5], \quad \psi_G(e_8) = [v_2, v_5]. \end{aligned}$$

FRAME 1.6.

- Due vertici che sono estremi di un lato si dicono **adiacenti**.
- Un **cappio** è un lato con estremi coincidenti.

Esercizio Dimostrare che se G è semplice allora $\varepsilon(G) \leq \binom{\nu(G)}{2}$.

FRAME 1.7. Un grafo si dice

- **bipartito** se il suo insieme di vertici può essere suddiviso in due sottoinsiemi X e Y , in modo che ogni lato abbia un estremo in X ed uno in Y . La coppia (X, Y) è detta una **bipartizione** del grafo. Tale grafo si dice **completamente bipartito** se è semplice ed ogni vertice di X è adiacente ad ogni vertice di Y .
- **completo** o **clique** se è semplice e due qualunque vertici distinti sono adiacenti.

FRAME 1.8.

- Indichiamo con P_n il grafo semplice che ha $V(P_n) = \{1, 2, \dots, n\}$ e $E(P_n) = \{[i, i+1] : 1 \leq i \leq n-1\}$. Il grafo P_n è bipartito.

- Indichiamo con K_n il grafo semplice che ha $V(K_n) = \{1, 2, \dots, n\}$ e $E(K_n) = \{ij : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$. Il grafo K_n è un grafo completo.
- Indichiamo con $K_{m,n}$ il grafo semplice che ha $V(K_{m,n}) = \{1, 2, \dots, m, m+1, \dots, m+n\}$ e $E(K_{m,n}) = \{[i, m+j] : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$. Il grafo $K_{m,n}$ è un grafo completamente bipartito, e la coppia $(\{1, \dots, m\}, \{m+1, \dots, m+n\})$ è una sua bipartizione.

FRAME 1.9.

- Il **grafo di Petersen** è un grafo semplice i cui vertici sono i sottoinsiemi di due elementi, ovvero le 2-collezioni senza

ripetizione, di $I_5 = \{1, 2, \dots, 5\}$ e i cui lati sono costituiti dalle coppie di vertici con etichette disgiunte.

- Indichiamo con Q_k il grafo semplice, detto **k-cubo**, i cui vertici sono le k -sequenze di $\{0, 1\}$ ed i cui lati sono costituiti dalle coppie di k -sequenze che differiscono in una posizione.

FRAME 1.10. Diciamo **unione dei sottografi** H e K di G il sottografo che ha come vertici l'unione insiemistica di $V(H) \cup V(K)$, come lati $E(H) \cup E(K)$ e come funzione di incidenza quella del grafo G ristretta a $E(H) \cup E(K)$.

Teorema Il grafo completo K_n è unione di k grafi bipartiti se e solo se $n \leq 2^k$.

1.2. Il grado dei vertici.

FRAME 1.11. Il **grado** $d_G(v)$ di un vertice v in G è il numero di lati di G che hanno v come estremo, intendendo che ogni cappio, avendo estremi coincidenti, viene contato 2 volte.

Indicheremo con $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ rispettivamente il minimo ed il massimo dei gradi dei vertici di G .

FRAME 1.12. Un grafo G è **k-regolare** se $d_G(v) = k$ per ogni $v \in V$.

Un grafo **regolare** è un grafo k -regolare per qualche k .

Esempi K_n è $(n-1)$ -regolare, $K_{n,n}$ è n -regolare, Q_k è k -regolare, il grafo di Petersen è 3-regolare.

FRAME 1.13. Teorema Sia G un grafo. Allora

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2\varepsilon(G).$$

Esempio Quanti lati ha K_n ? e $K_{m,n}$? e Q_k ?

Corollario In ogni grafo, il numero dei vertici di grado dispari è pari.

1.3. Sottografi.

FRAME 1.14. • Un grafo $H = (V(H), E(H), \psi_H)$ è un **sottografo** di $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ se $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ e ψ_H coincide con ψ_G su $E(H)$.

- Un **sottografo generatore** di G è un sottografo H tale che $V(H) = V(G)$.

FRAME 1.15. Sia G un grafo,

- Se F è un sottoinsieme non vuoto di $E(G)$, il sottografo di G **indotto** da F , indicato con $G[F]$, è il sottografo di G i cui vertici sono quelli di G ed il cui insieme dei lati è F .
- Se W è un sottoinsieme non vuoto di $V(G)$, il sottografo di G **indotto** da W , indicato con $G[W]$, è il sottografo di G il cui insieme dei vertici è W ed il cui insieme dei lati è l'insieme dei lati di G che hanno entrambi i vertici in W .

2. PERCORSI E CONNESSIONE

2.1. Percorsi.

FRAME 2.1. Sia W una sequenza ordinata di vertici e lati alternati di un grafo

$$W := v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_k v_k,$$

dove ciascun lato è preceduto e seguito dai suoi estremi.

- La sequenza W è detta **percorso** in G da v_0 a v_k ;
- i vertici v_0 e v_k sono detti **l'origine e il termine** del percorso W o anche gli **estremi** di W ;
- $v_1, \dots, v_{k-1}$ sono detti **vertici interni** di W ;
- l'intero k è detto **lunghezza** di W ;
- se l'origine v_0 e il termine v_k coincidono, il percorso W è detto **chiuso**.

FRAME 2.2. • Un **cammino** è un percorso i cui vertici (e quindi i lati) sono tutti distinti.

Proposizione Un percorso di lunghezza minima tra due vertici è un cammino.

La **distanza** $d_G(u, v)$ tra due vertici u e v di G è la lunghezza del cammino più breve in G con estremi u e v .

Proposizione Un percorso che congiunge due vertici distinti u e v di un grafo G contiene un cammino che congiunge u e v .

FRAME 2.3. Sia G un grafo.

- Due vertici u, v di G sono detti **connessi** se c'è un percorso tra u e v in G ;
- il grafo G è **connesso** se ogni coppia di vertici distinti è connessa;
- diciamo **componenti connesse** di G i sottografi connessi massimali;
- indichiamo con $\gamma(G)$ il numero di componenti connesse di G ;
- il grafo G si dice **sconnesso** se ha almeno due componenti connesse.

FRAME 2.4. Esercizio Un grafo G con n vertici e $k \leq n$ lati ha almeno $n - k$ componenti connesse.

Esercizio Sia G un grafo semplice con $\delta(G) \geq \frac{n-1}{2}$.

- a) Siano u, v due vertici in G non adiacenti. Provare che u e v sono adiacenti ad un vertice comune.
- b) Dedurre da a) che G è connesso.

FRAME 2.5. Un **ponte** in un grafo G è un lato e tale che $\gamma(G - e) > \gamma(G)$.

Proposizione Un ponte in un percorso chiuso è ripetuto un numero pari di volte.

Uno **snodo** di un grafo G è un vertice v tale che $\gamma(G - v) > \gamma(G)$. Diciamo **blocco** di G un suo sottografo connesso privo di snodi massimale.

Proposizione Due blocchi distinti di un grafo hanno al più un vertice in comune.

2.2. Cicli.

FRAME 2.6. • Un **ciclo** è un percorso chiuso a lati e vertici distinti, eccetto la ripetizione origine = termine del percorso.

I cicli sono i seguenti percorsi chiusi:

- (1) i cappi;
- (2) i percorsi del tipo $uevf$ con u, v vertici distinti ed e, f lati distinti;
- (3) i percorsi chiusi di lunghezza ≥ 3 a vertici distinti, eccetto la ripetizione origine = termine del percorso.

FRAME 2.7. Proposizione Un lato di un grafo è un ponte se e solo se esso non è contenuto in alcun ciclo del grafo.

Corollario Un lato di un grafo G che compare un numero dispari di volte in un percorso chiuso di G è contenuto in un ciclo. In particolare un percorso chiuso che ha un lato che non si ripete contiene un ciclo.

Corollario Sia G un grafo; se $\delta \geq 2$ allora G contiene un ciclo.

Corollario Ogni percorso chiuso dispari contiene un ciclo dispari.

FRAME 2.8. Proposizione Sia G un grafo connesso con $\Delta(G) \leq 2$. Allora G è un ciclo o un cammino.

Proposizione Un grafo è bipartito se e solo se ogni suo ciclo ha lunghezza pari.

2.3. Isomorfismi.

FRAME 2.9. Due grafi G ed H si dicono **isomorfi** (e scriveremo $G \cong H$) se esistono delle biiezioni $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ e $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$ tali che u e v sono estremi di e se e solo se $\theta(u)$ e $\theta(v)$ sono estremi di $\phi(e)$.

Una tale coppia di mappe (θ, ϕ) è detta **isomorfismo di grafi**.

Diremo che una biiezione θ tra i vertici di due grafi G ed H **induce** un isomorfismo tra G ed H se esiste una mappa $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$ tale che (θ, ϕ) sia un isomorfismo tra G ed H .

FRAME 2.10. Proposizione Siano G ed H due grafi con $|V(G)| = |V(H)|$. Una applicazione biiettiva $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ induce un isomorfismo tra i grafi G ed H se e solo se, comunque dati due vertici u e v (anche coincidenti), il numero di lati che connettono u a v è uguale al numero di lati che connettono $\theta(u)$ a $\theta(v)$.

FRAME 2.11. Sia (θ, ϕ) un isomorfismo tra due grafi G ed H ; allora necessariamente

- $|V(G)| = |V(H)|$;
- $|E(G)| = |E(H)|$;
- $d_H(\theta(u)) = d_G(u)$ per ogni $u \in V(G)$;
- se u è adiacente ad un vertice di grado k in G allora $\theta(u)$ è adiacente ad un vertice di grado k in H ;
- $\gamma(G) = \gamma(H)$;

FRAME 2.12.

- l'immagine del sottografo indotto dai vertici di grado k di G è il sottografo indotto dai vertici di grado k di H ;
- l'immagine del sottografo di G indotto da un insieme di vertici V è il sottografo di H indotto dall'insieme delle immagini dei vertici di V ;
- l'immagine di un ciclo di G di lunghezza k è un ciclo di H di lunghezza k (quindi 'triangoli' vanno in 'triangoli', 'rettangoli' in 'rettangoli'... e l'ordine dei vertici nei due cicli è rispettato);
- Il numero di cicli di G di lunghezza k è uguale al numero di cicli di H di lunghezza k .

3. ALBERI

3.1. Grafi molto ... naturali.

FRAME 3.1. Un **albero** è un grafo connesso privo di cicli.

Un grafo connesso è un albero se e solo se ogni lato è un ponte.

Esempi Il cammino con n vertici P_n è un albero. Il grafo completamente bipartito $K_{1,n-1}$ è un albero detto **stella** con n vertici.

Proposizione In un albero, ogni coppia di vertici distinti è collegata da un unico cammino.

FRAME 3.2. Sia G un albero. Diciamo **foglia** ogni vertice di G di grado uno.

Teorema Ogni albero con almeno due vertici ha almeno due foglie.

FRAME 3.3. Processo di crescita. Sia G_1 un grafo formato da un solo vertice. Per ogni $i \geq 1$, sia G_{i+1} il grafo ottenuto da G_i introducendo un nuovo vertice, e connettendolo al grafo G_i tramite un nuovo lato. Chiaramente G_i ha i vertici e $i - 1$ lati.

Teorema Ogni grafo ottenuto con il “processo di crescita” è un albero, ed ogni albero si può ottenere in questo modo scegliendo a piacere il vertice di partenza.

In particolare ogni albero con ν vertici ha $\nu - 1$ lati.

FRAME 3.4. Proposizione Sia G un grafo senza cicli. Allora $\varepsilon(G) \leq \nu(G) - 1$. Se $\varepsilon(G) = \nu(G) - 1$ allora G è un albero.

Proposizione Sia G un grafo connesso. Allora $\varepsilon(G) \geq \nu(G) - 1$. Se $\varepsilon(G) = \nu(G) - 1$, allora G è un albero.

4. PERCORSI DI EULERO

4.1. Grafi euleriani.

FRAME 4.1. Sia G un grafo connesso. Un **percorso di Eulero** in G è una percorso che attraversa una ed una sola volta ogni lato di G .

Un grafo si dice **euleriano** se esso contiene un percorso di Eulero chiuso.

FRAME 4.2. Proposizione Sia G un grafo connesso che ammette un percorso di Eulero P .

- (a) Ogni vertice di G interno e non estremo di P ha grado pari.
- (b) Se P è chiuso, ogni vertice di G ha grado pari.

Teorema Un grafo connesso ha un percorso di Eulero chiuso se e solo se ogni suo vertice ha grado pari. Ammette invece un percorso di Eulero se e solo se ha al massimo 2 vertici di grado dispari.

5. GRAFI A COLORI

5.1. La k -colorazione.

FRAME 5.1. Una Facoltà propone in un trimestre 10 corsi rivolti agli studenti di differenti Corsi di Studi. A seconda del Corso di Studio seguito, lo studente deve seguire obbligatoriamente certi corsi. Si vuole predisporre un orario che permetta a tutti gli studenti di seguire le lezioni dei corsi obbligatori, compattando il più possibile l'orario.

FRAME 5.2. Una **k -colorazione** dei vertici di un grafo G consiste nell'assegnazione di k numeri $1, 2, \dots, k$ detti **colori** ai vertici di G in modo tale che a due vertici adiacenti non sia assegnato lo stesso colore. Diremo **k -colorabile** ogni grafo G che ammette una k -colorazione.

Ovviamente un grafo con cappi non è mai k -colorabile, e un grafo senza cappi è k -colorabile se e solo se tale è il grafo semplice ad esso sottostante.

FRAME 5.3. Il **numero cromatico** $\chi(G)$ associato al grafo semplice G è il minimo degli interi k strettamente positivi per cui G risulta k -colorabile.

Se H è un sottografo di G si ha $\chi(H) \leq \chi(G)$ e $\chi(H) \leq \nu(G)$.

Un ciclo pari ha numero cromatico 2, mentre un ciclo dispari ha numero cromatico 3.

Se G contiene un grafo completo K_m si ha

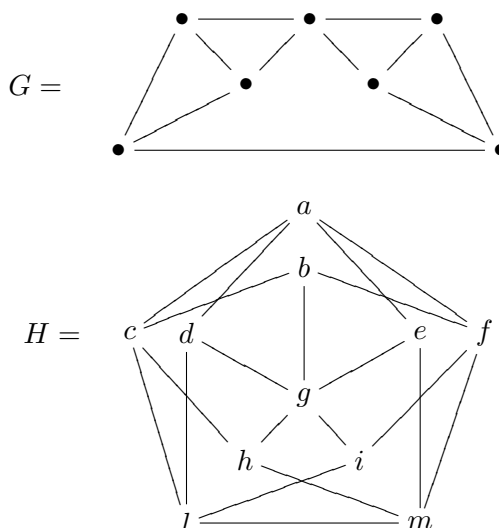
$$\chi(G) \geq m.$$

FRAME 5.4. Sia G un grafo semplice. Il **numero di clique** $\omega(G)$ di G è il numero di vertici del più grande sottografo completo di G . Per ogni m

esistono grafi con numero cromatico m che hanno numero di clique strettamente inferiore ad m .

Ad esempio ogni ciclo dispari ha numero di clique 2 e numero cromatico 3.

FRAME 5.5. Determinare il numero cromatico ed il numero di clique dei grafi aventi le seguenti rappresentazioni:

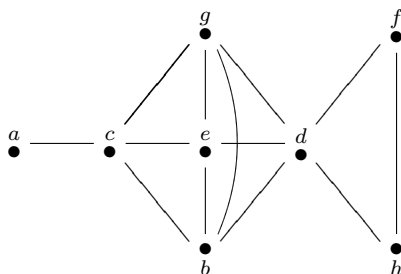


FRAME 5.6. La colorazione sequenziale Denotiamo con $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i vertici di G : tali nomi determinano un ordine naturale in $V(G)$.

- (1) Si assegna a v_1 il colore 1.
- (2) Supposto di aver assegnato dei colori ai vertici $v_1, \dots, v_i$ si assegna a v_{i+1} il colore più piccolo non utilizzato per vertici adiacenti a v_{i+1} .

Attenzione!!! Il numero di colori utilizzato con la colorazione sequenziale di un grafo dipende dall'ordine scelto per i vertici.

FRAME 5.7. Si dice che un grafo G è un grafo **ad intervalli** se i suoi vertici si possono rappresentare con intervalli chiusi della retta reale in modo tale che i lati di G corrispondano a vertici i cui intervalli hanno fra loro intersezione non vuota.



FRAME 5.8. Sia G un grafo ad intervalli. Allora $\chi(G) = \omega(G)$.

FRAME 5.9. Teorema Sia G un grafo semplice. Ordiniamo i vertici di G in ordine decrescente di grado: siano $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ i gradi di $v_1, v_2, \dots, v_n$. Allora

$$\chi(G) \leq \max\{\min\{d_i + 1, i\} : i = 1, \dots, \nu(G)\}.$$

In particolare

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

FRAME 5.10. Per provare che un grafo G ha numero cromatico m si deve mostrare che è m -colorabile e che non è $(m - 1)$ -colorabile.

Si stima pertanto il numero cromatico dal basso e dall'alto per individuare i possibili candidati; poi, a partire dalla stima dal basso, si cerca di provare l'esistenza o meno di una tale colorazione.

Per trovare una m -colorazione di un grafo si possono ignorare inizialmente tutti i vertici di grado minore di m , dato che, una volta che sia stato assegnato un colore ad ogni altro vertice, ci sarà sempre almeno un colore ammissibile per la loro colorazione.

FRAME 5.11. Teorema di Brooks Se un grafo semplice G non è completo e non è un ciclo dispari, allora $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

FRAME 5.12. *Un grafo G si dice **planare** se esso può essere rappresentato su un piano in modo tale che i lati si intersechino solo agli estremi. Tale rappresentazione è detta **una rappresentazione piana** di G .*

Teorema di Appel-Haken. *Ogni grafo planare semplice è 4-colorabile.*