FRAME 0.1. ***Teorema di Fubini*** *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una funzione continua Allora*

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \right] dx.$$

Siano g_1 *e* g_2 *due funzioni reali di variabile reale continue. Sia* $f : D \to \mathbb{R}$ *una funzione continua definita su*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \le x \le b, \ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}.$$

Allora

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right] dx.$$

FRAME 0.2. ***Cambio di coordinate.***

Cartesiane - Polari

$x = r\cos\theta$, *cioè* $x = x(r,\theta)$ *è funzione di* r *e* θ.

$y = r\sin\theta$, *cioè* $y = y(r,\theta)$ *è funzione di* r *e* θ.

Allora l'elemento d'area $dxdy$ *è uguale a*

$$\left| \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} \right| drd\theta = \left| \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial r} \right| drd\theta = rdrd\theta.$$

Passaggio in coordinate polari

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) rdrd\theta.$$

FRAME 0.3. *Se invece*

$x = 2u + 3v$ *cioè* $x = x(u,v)$ *è funzione di* u *e* v, *e*

$y = -v$, *cioè* $y = y(u,v)$ *è funzione di* u *e* v, *allora l'elemento d'area* $dxdy$ *è uguale a*

$$\left| \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \right| dudv = \left| \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \right| dudv =$$

$$= \left| \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \right| dudv = 2dudv.$$

Passaggio nelle nuove coordinate

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(2u+3v, -v) 2dudv.$$