CRESCITA E DECADIMENTO ESPONENZIALE

Umberto Marconi

Dipartimento di Matematica – Università degli Studi di Padova

1 Valori sorprendenti

È molto difficile rendersi veramente conto della rapidità con cui cresce la funzione esponenziale al crescere dell'esponente. Per dare un'idea di tale comportamento, consideriamo un esperimento ideale e un famoso aneddoto. Al lettore è richiesta una piccola dose di immaginazione nel forzare mentalmente le limitazioni materiali dei procedimenti descritti.

1.1 Un esperimento ideale

Preso un foglio di carta sottile, pieghiamolo una prima volta in due, poi pieghiamo di nuovo in due il foglio ripiegato, poi una terza volta e così via. Supponiamo che lo spessore originale del foglio, prima di iniziare il procedimento, sia di un decimo di millimetro. Indichiamo tale valore con la lettera u e adottiamolo come unità di misura. Inoltre indichiamo con la lettera y lo spessore generico del foglio ripiegato e notiamo che a ogni piegatura ha luogo un raddoppiamento di y. Riportiamo nella tabella seguente alcuni valori di y relativi ai primi passi, considerando come passo 0 la situazione iniziale del foglio non ripiegato:

Numero passo	*Spessore*
$n = 0$	$y = 1 = 2^0 u$
$n = 1$	$y = 2 = 2^1 u$
$n = 2$	$y = 4 = 2^2 u$
$n = 3$	$y = 8 = 2^3 u$
$n = 4$	$y = 16 = 2^4 u$
...	...
n qualunque	$y = 2^n u$

Evidenziamo che i valori presenti nella colonna di destra sono misurati in unità u, pari a un decimo di millimetro. Così, ad esempio, al passo $n = 4$ lo spessore è di 1.6 millimetri e, in generale, al passo n-esimo sarà di 2^n decimi di millimetro, cioé $\frac{2^n}{10}$ millimetri. Naturalmente l'operazione è realizzabile in concreto solo per i primi passi, ma noi stiamo supponendo di poterla estendere idealmente eseguendo un numero di piegature arbitrario.

Ora si chiede al lettore di dare una stima dello spessore dopo cento passi cioè, in sostanza, di valutare approssimativamente la misura di 2^{100} decimi di millimetro.

Il risultato è davvero sorprendente: tale misura è di circa 12.7 miliardi di anni luce, cioè più o meno la distanza percorsa da un raggio di luce dal big bang a oggi!
Nella prossima tabella è riportata una stima approssimativa di alcuni valori di y, messi a confronto con quantità conosciute. Come nella tabella precedente, n indica il numero di pieghe eseguite e lo spessore y è misurato in unità u, cioè indica il numero di strati del foglio ripiegato.

Numero passo	*Spessore*	*Termine di confronto*
$n = 23$	$y = 8.39 * 10^6 u$	un chilometro $= 10^7 u$
$n = 51$	$y = 2.2 * 10^{15} u$	distanza terra-sole $= 1.5 * 10^{15} u$
$n = 66$	$y = 7.38 * 10^{19} u$	un anno-luce $\approx 10^{20} u$
$n = 100$	$y = 1.27 * 10^{30} u$	distanza dal big bang $\approx 1.5 * 10^{30} u$

1.2 Un famoso aneddoto

Narra la leggenda che l'inventore degli scacchi, il bramino Sissa, quando presentò in dono al suo sovrano il nuovo gioco, chiese modestamente come ricompensa una certa quantità di riso che si doveva calcolare così: si dovevano mettere un chicco di riso nella prima casella della scacchiera, 2 chicchi nella seconda, 4 nella terza, 8 nella quarta, e così via, cioè in ogni casella il doppio dei chicchi messi nella casella precedente. Il burlone chiese che gli fosse consegnato il contenuto della 64-esima casella.
Il re pensava di cavarsela con poco, ma evidentemente non conosceva la funzione esponenziale: infatti allibì quando i suoi esperti lo informarono che la quantità di riso richiesta superava di gran lunga le risorse del suo impero!
Facciamo un piccolo calcolo. Stimando in $\frac{1}{45}$ di grammo il peso medio di un chicco di riso, il peso di 2^{63} chicchi (quelli che dovrebbero trovarsi nella 64-esima casella) è di oltre 200 miliardi di tonnellate.
Considerando che la produzione mondiale di riso nel 2006 è stata di 636 milioni di tonnellate, a questo livello di produzione occorrono oltre trecento anni per produrre tale quantità di riso. Possiamo fare un altro confronto. Supponendo di caricare il riso in vagoni merci a quattro assi, che sono lunghi 20 metri e trasportano ciascuno 50 tonnellate, occorrerebbe un treno lungo 80 milioni di chilometri, vale a dire:

- oltre 2000 volte l'equatore terrestre;
- 210 volte la distanza media fra la terra e la luna;
- oltre la metà della distanza fra la terra e il sole.

(Tratto da `http://www.artico.name/testi/exp.shtm`.)

2 Crescita esponenziale

Problema 1 *Consideriamo una coltura di batteri in presenza di fonti inesauribili di cibo e senza antagonisti. Indicando con y_0 il numero di batteri presenti all'istante $t_0 = 0$ e sapendo che la popolazione raddoppia ogni due ore (tempo di duplicazione), quale sarà la popolazione dopo sei ore? E dopo n ore? Dopo quanto tempo la popolazione sarà triplicata? Se x è il tasso di variazione in un'ora, esprimere in funzione di x il tasso di variazione per vari multipli e sottomultipli di ora.*

Commento e soluzione.

Per ora supponiamo che il tempo non scorra con continuità, ma proceda a salti con tacche discrete 0, 1, 2,..., n, $n+1$,... e che ad ogni tacca contiamo i nuovi nati.
È naturale congetturare che il tasso di variazione in un'ora (cioè il rapporto fra il numero di nuovi nati nella tacca successiva e il numero di presenti) sia costante, cosicché quando il numero di presenti sarà doppio avremo il doppio di nascite, quando sarà triplo avremo il triplo di nascite,....
Sia $x > 0$ il tasso di variazione in un'ora (tasso discreto); chiamiamo $y(n)$ il numero di individui presenti alla tacca n-esima e poniamo $y(0) = y_0$. Il processo è descritto dalla seguente equazione *discreta*:

$$\frac{y(n+1) - y(n)}{y(n)} = x$$

cioè:

$$y(n+1) - y(n) = xy(n)$$

ovvero:

$$y(n+1) = (1+x)y(n)$$

Ponendo $1 + x = k$, otteniamo l'*equazione della crescita esponenziale*:

$$y(n+1) = ky(n) \qquad k > 1, \qquad k - 1 = x = \text{tasso discreto} \tag{1}$$

La soluzione dell'equazione (1) si ricava induttivamente (come?) ottenendo la soluzione:

$$y(n) = k^n y_0, \qquad k > 1 \tag{2}$$

Se vogliamo mettere in evidenza il tasso di variazione nell'unità di tempo (tasso discreto), scriviamo:

$$y(n) = (1+x)^n y_0, \qquad x > 0 \tag{3}$$

2. Esercizio. Dimostrare che se $x > 0$ e $n > 1$ allora $(1+x)^n > 1 + nx$.
A questo punto dobbiamo chiederci come sarà la soluzione se la variabile temporale scorre con continuità, cioè se invece di considerare il tempo $n \in \mathbb{N}$, consideriamo il tempo $t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$.
Da (2) possiamo ipotizzare che la soluzione che fornisce il numero di batteri nel caso continuo sia l'esponenziale di base k:

$$y(t) = k^t y_0, \qquad k > 1$$

ovvero:

$$y(t) = (1+x)^t y_0, \qquad x > 0$$

Chiamiamo *tempo di duplicazione* il tempo T per cui $y(T) = 2y_0$. Poiché per (2) si ha $y(T) = k^T y_0$, otteniamo $k^T = 2$ e (2) diventa:

$$y(t) = k^t y_0 = (k^T)^{\frac{t}{T}} y_0 = 2^{\frac{t}{T}} y_0$$

cioè:

$$y(t) = 2^{\frac{t}{T}} y_0 \tag{4}$$

3. Esercizio. Dimostrare che se T è il tempo di duplicazione allora $y(t+T) = 2y(t)$.

4. Esercizio. Dimostrare che se T è il tempo di duplicazione allora il tasso discreto è $x = 2^{\frac{1}{T}} - 1$.
Nel nostro problema il tempo di duplicazione è $T = 2$ e quindi la soluzione è:

$$y(t) = 2^{\frac{t}{2}} y_0 \tag{5}$$

e il tasso di variazione in un'ora è:

$$x = 2^{\frac{1}{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414214$$

cioè:

il tasso di variazione in un'ora è circa del 41.4%,
che è meno della metà del tasso di variazione in due ore.

Se vogliamo sapere qual è la popolazione alla sesta ora, dobbiamo porre $t = 6$ ottenendo $y(6) = 2^3 y_0$ e quindi dopo sei ore (tre volte il tempo di duplicazione) la popolazione è ottuplicata.
Per sapere dopo quanto tempo $y(t) = 3y_0$ dobbiamo porre $2^{\frac{t}{2}} y_0 = 3y_0$ da cui $2^{\frac{t}{2}} = 3$ cioè $t = \log_2 9 \approx 3.1699 > 3$.
Dunque: per duplicare servono due ore, per quadruplicare servono quattro ore, per triplicare servono **un po' più** di tre ore.
Data la funzione di crescita esponenziale

$$y(t) = y_0 k^t = y_0(1+x)^t$$

ove $x > 0$ è il tasso discreto, consideriamo un intervallo di tempo che va da un istante t a un istante $t+h$ e calcoliamo il tasso di variazione in questo intervallo di tempo (relativo all'ammontare $y(t)$):

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{y(t)} = \frac{y_0 k^{t+h} - y_0 k^t}{y_0 k^t} = y_0 k^t \frac{k^h - 1}{y_0 k^t} = k^h - 1$$

Perciò il tasso di variazione in un intervallo di tempo di lunghezza h è $k^h - 1$, indipendentemente dall'istante t scelto.
Se calcoliamo il tasso di variazione in un intervallo di lunghezza h, ma riferito all'unità di tempo, abbiamo:

$$\lambda_h = \frac{k^h - 1}{h}$$

Il *tasso istantaneo* λ è il limite del tasso medio λ_h così ottenuto per $h \to 0$:

$$\text{tasso istantaneo } \lambda = \lim_{h \to 0} \frac{k^h - 1}{h} =^{1} = \log k = \log(1+x) < x$$

Poiché la relazione fra il tasso istantaneo λ e il tasso discreto x è

$$\lambda = \log(1+x) \qquad \text{ovvero} \qquad x = e^{\lambda} - 1$$

la funzione della crescita esponenziale è:

$$y(t) = y_0(1+x)^t = y_0 e^{\lambda t}$$

ove la prima espressione usa il tasso discreto x e la seconda usa il tasso istantaneo λ.

3 L'equazione differenziale

La funzione esponenziale di variabile indipendente t

$$k^t = (1+x)^t = (e^{\lambda})^t = e^{\lambda t}, \qquad \lambda > 0,\ x > 0,\ k > 1$$

ci fornisce il rapporto fra $y(t)$ e y_0 nel processo di crescita esponenziale (x=tasso discreto, λ=tasso istantaneo).
Vogliamo vedere come impostare l'equazione differenziale che descrive tale tipo di crescita.
Tornando ai nostri simpatici batteri, ricordiamo che t indica il tempo (variabile indipendente) e $y = y(t)$ la funzione che fornisce il numero di individui all'istante t (y si dice variabile dipendente).
Con il simbolo Δt indichiamo un piccolo incremento di tempo (Δt è un simbolo unitario e non il prodotto di due elementi). Le nostre considerazioni sulla crescita dei batteri ci dicono che la probabilità che ci siano nuovi nati durante l'incremento Δt non dipende dall'istante da cui partiamo, ma solo da Δt. Se t_1 e t_2 sono istanti diversi, si ha:

$$\frac{y(t_1 + \Delta t) - y(t_1)}{y(t_1)} = \frac{y(t_2 + \Delta t) - y(t_2)}{y(t_2)}$$

Tale rapporto non dipende da t ed è una funzione di Δt: possiamo indicarlo con il simbolo $\lambda(\Delta t)$. Possiamo scrivere:

$$\frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{y(t)} = \lambda(\Delta t), \qquad \text{per ogni } t > 0.$$

Ponendo $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$ scriviamo infine l'equazione:

$$\frac{\Delta y}{y} = \lambda(\Delta t)$$

ove $\frac{\Delta y}{y}$ è il tasso di variazione durante l'incremento Δt. Se dividiamo per Δt otteniamo il tasso di variazione per unità di tempo, che è:

$$\frac{1}{y}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\lambda(\Delta t)}{\Delta t} \tag{6}$$

Poiché il rapporto $\frac{\lambda(\Delta t)}{\Delta t}$ non dipende da t, se immaginiamo che Δt diventi molto piccolo, nel momento in cui esso *diventa* 0 *senza essere* 0 otteniamo un valore costante λ. Con

[1] Derivata della funzione k^t per $t = 0$.

questo passaggio il rapporto $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ diventa un *rapporto di infinitesimi* che si indica con il simbolo $\frac{dy}{dt}$ e si chiama *velocità istantanea di variazione.*
Se in (6) passiamo agli infinitesimi otteniamo:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \lambda, \qquad \text{con } \lambda \text{ costante maggiore di 0}$$

ovvero

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y \tag{7}$$

cioè un'*equazione differenziale* che dice che la velocità istantanea di crescita è direttamente proporzionale al numero di individui presenti.
A questo punto possiamo solo verificare che la funzione

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}$$

è la soluzione dell'equazione differenziale (7) che all'istante $t_0 = 0$ assume il valore y_0 (ma per ora non siamo in grado di dimostrare che non ci sono altre soluzioni).

4 Decadimento radioattivo

Problema 5 *Dopo tre giorni il* 50% *della radioattività prodotta da un'esplosione nucleare è scomparsa. Quanto tempo è necessario perché scompaia il* 99% *della radioattività?*

Soluzione e commento

Supponiamo per semplicità che la radioattività sia totalmente dovuta a un solo isotopo radioattivo che è soggetto a un *decadimento radioattivo* a seguito di una spontanea rottura dei suoi nuclei. Per ogni isotopo radioattivo esiste una probabilità caratteristica di subire decadimento in un dato intervallo di tempo. Con conti analoghi a quelli effettuati per la popolazione di batteri, abbiamo che la velocità di decadimento[2] è direttamente proporzionale (con costante negativa) alla massa presente in quel momento. Se $y = y(t)$ indica la massa presente all'istante t e $\lambda > 0$ è la costante di decadimento ($-\lambda$=tasso di variazione istantanea), possiamo scrivere l'equazione differenziale del decadimento radioattivo:

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y$$

che ha per soluzione

$$y(t) = y_0 e^{-\lambda t} \tag{8}$$

ove y_0 è la massa all'istante $t_0 = 0$. In questo caso è importante il *tempo di dimezzamento*, cioè il tempo T per cui $y(T) = \frac{1}{2}y(0)$.

6. Esercizio. Dimostrare che se T è il tempo di dimezzamento allora $y(t+T) = \frac{1}{2}y(t)$ per ogni t.

7. Esercizio. Dimostrare che se T è il tempo di dimezzamento allora $\lambda = \frac{1}{T}\log 2$.

[2]Velocità negativa con cui varia la massa dell'isotopo instabile.

8. Esercizio. Dimostrare che se T è il tempo di dimezzamento allora la soluzione $y(t)$ è data da:

$$y(t) = y_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \tag{9}$$

Usando (9) siamo in grado di risolvere il problema in cui $T = 3$. Sostituendo abbiamo:

$$\begin{aligned}
10^{-2} y_0 &= y_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} \\
\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}} &= 10^{-2} \\
2^{\frac{t}{3}} &= 10^2 \\
\frac{t}{3}\log 2 &= \log 100 \\
t &= \frac{\log 1\,000\,000}{\log 2} \approx 19.93 \text{ giorni}
\end{aligned}$$

Per la datazione di reperti archeologici si sfrutta un metodo basato sul decadimento radioattivo del carbonio 14, il cui tempo di dimezzamento è di $T = 5700$ anni.

9. Esercizio. Il carbonio radioattivo nelle piante viventi decade al ritmo di 15.3 disintegrazioni al minuto (dpm) per ogni grammo di carbonio contenuto. Stimare l'età dei seguenti reperti archeologici effettivamente datati con questo metodo nel 1950.

a) Una scheggia proveniente dal trono del Faraone Tutankhamen, con 10.14 dpm.

b) Un frammento della porta di una casa edificata a Babilonia sotto il regno di Hammurabi, con 9.52 dpm.

c) Escrementi di mammut gigante ritrovato nella Gypsum Cave nel Nevada, con 6.42 dpm.

d) Una lancia di legno duro ritrovata nel Nevada, con 4.17 dpm.

Soluzione di (a). Sia $h(t)$ la funzione che fornisce il numero dei dpm rilevabili all'istante t. La funzione $h(t)$ è proporzionale alla massa $y(t)$ di carbonio 14 contenuto in un grammo di carbonio. Possiamo allora scrivere:

$$h(t) = cy(t) = cy_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

Sostituendo i valori abbiamo $15.3 = cy_0$, da cui, se t è il numero di anni intercorso fino alla rilevazione 10.14:

$$\begin{aligned}
10.14 = h(t) &= 15.3 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}} \\
2^{\frac{t}{5700}} &= \frac{15.3}{10.14} \\
t \log 2 &= 5700 \log \frac{15.3}{10.14} \\
t &= \frac{1}{\log 2} 5700 \log \frac{15.3}{10.14} \approx 3383 \text{ anni (nel 1950).}
\end{aligned}$$

Questa pagina è tratta da:
J. Douglas Macdougall, *Storia della terra*, Einaudi, 1999.

po, mentre la frazione che decade in ogni unità di tempo rimane costante, come è indicato nella figura 6.2.

Gli isotopi radioattivi presenti in natura sono numerosi, piú di quanto si sia portati a pensare. Nell'ambiente abbondano ormai anche molti isotopi radioattivi dispersi dall'uomo con le bombe e i reattori nucleari: alcuni di questi

Figura 6.2.
La quantità (indicata qui in unità arbitrarie) di carbonio 14 (un isotopo radioattivo del carbonio) presente, ad esempio, in una pianta resta costante finché l'organismo è vivo e continua a scambiare CO_2 con l'atmosfera. Dopo la morte della pianta (indicata con il tempo zero nel grafico), il contenuto di carbonio 14 si dimezza ogni 5700 anni, trasformandosi in azoto non radioattivo. I punti sulla curva sono separati da intervalli di tempo corrispondenti al tempo di dimezzamento. È ovvio che, trascorsi 5 o 6 periodi di dimezzamento, resterà nel reperto poco carbonio 14. Lo stesso processo è illustrato, nella parte superiore della figura, con la scomparsa di quasi tutto il carbonio 14 da un recipiente inizialmente pieno.