Esercizi di Analisi Stocastica della 1^a settimana (Corso di Laurea Specialistica in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Sia X un vettore aleatorio d-dimensionale centrato di matrice di covarianza C. Dimostrare che:

1. se X ha densità f rispetto alla misura di Lebesgue, allora per ogni $\xi \in \mathbb{R}^d$ si ha
$$\langle C\xi, \xi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \langle x, \xi\rangle^2 f(x)\ dx$$
2. se C non è invertibile allora X non può avere densità rispetto alla misura di Lebesgue.

Esercizio 2. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato, e $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; E)$ lo spazio delle variabili aleatorie definite sullo spazio metrico completo E con metrica d, con la consueta relazione di equivalenza $X \equiv Y$ se e solo se $X = Y$ $\mathbb{P}$-quasi certamente. Definiamo
$$\rho(X, Y) = \mathbb{E}\left[\frac{d(X, Y)}{1 + d(X, Y)}\right]$$

1. Dimostrare che ρ è una metrica sullo spazio $L^0(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; E)$.
2. Dimostrare che $\rho(X_n, X) \to 0$ se e solo se $X_n \to X$ in probabilità.

Esercizio 3. Siano X, Z variabili aleatorie reali indipendenti con $X \sim N(0, 1)$ e $\mathbb{P}\{Z = 1\} = \mathbb{P}\{Z = -1\} = 1/2$. Poniamo $Y := XZ$.

1. Dimostrare che $Y \sim N(0, 1)$.
2. Dimostrare che X e Y sono scorrelate.
3. Dimostrare che $X + Y$ non ha legge normale.
4. Concludere che (X, Y) non può essere un vettore aleatorio normale, nonostante X e Y siano normali scorrelate.

Esercizio 4. Sia X un processo stocastico adattato a $(\mathcal{F}_t)_t$ a valori in $\mathbb{R}$, con insieme dei tempi un intervallo I che contiene 0. Definiamo ora, per ogni $t \in I$, l'applicazione
$$Y_t(\omega) := \int_0^t X_s(\omega)\ ds$$
Vogliamo vedere se la famiglia $(Y_t)_t$ è un processo stocastico adattato a $(\mathcal{F}_t)_t$. Definiamo innanzitutto
$$A := \left\{\int_0^t X_s\ ds \text{ è ben definito per ogni } t \in I\right\}$$

1. Se X è progressivamente misurabile e $A = \Omega$, allora Y è un processo continuo e progressivamente misurabile.
2. Se X è progressivamente misurabile e standard e $\mathbb{P}(A) = 1$, allora, posto $Y_t = 0$ su A^c, il processo Y è progressivamente misurabile.