

Esercizi di Analisi Stocastica della 3^a settimana (Corso di Laurea Specialistica in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Un processo reale X si dice **ad incrementi indipendenti** se per ogni $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \in I$, le variabili aleatorie $X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sono indipendenti. Dimostrare che:

1. Se chiamiamo $\mu_{s,t}$ la legge di $X_t - X_s$ su $\mathbb{R}$, allora si ha che $\mu_{s,u} = \mu_{s,t} * \mu_{t,u}$ per ogni $s < t < u$, dove $*$ denota il prodotto di convoluzione tra leggi.
2. Preso $J = (t_1, \dots, t_n) \subset I$, chiamiamo μ_J la legge di $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, e μ_0 la legge di X_0 . Dimostrare che per ogni $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ misurabile e opportuna (al solito, positiva oppure limitata) si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu_J(x) = \int f(x_0 + x_1, x_0 + x_1 + x_2, \dots, x_0 + \dots + x_n) d\mu_0(x_0) d\mu_{0,t_1}(x_1) \dots d\mu_{t_{n-1},t_n}(x_n)$$

3. Dimostrare che le $(\mu_J)_{J \subset I}$ soddisfano la condizione di coerenza del teorema di Kolmogorov.

Esercizio 2. Sia N un processo ad incrementi indipendenti con $\mu_0 = \delta_0$ e $\mu_{s,t} = Po(\lambda(t-s))$.

1. Verificare che le $(\mu_{s,t})_{s,t}$ verificano la condizione $\mu_{s,u} = \mu_{s,t} * \mu_{t,u}$.
2. Per $\beta = 1, 2, 3$, calcolare $\mathbb{E}[|N_t - N_s|^\beta]$ (suggerimento: usare la funzione caratteristica).
3. Cosa si può concludere in base al teorema di continuità di Kolmogorov?

Esercizio 3. Sia B un moto browniano. Dimostrare che anche i seguenti processi sono moti browniani, specificando rispetto a quale filtrazione:

1. $X_t := B_{t+s} - B_s$ per $s > 0$;
2. $X_t := -B_t$;
3. $X_t := cB_{t/c^2}$ per $c \in \mathbb{R}^*$;
4. $X_t := tB_{1/t} \mathbf{1}_{\{t>0\}}$;

Esercizio 4. Siano $B^1, \dots, B^n$ moti browniani indipendenti tra loro, e definiamo $B(t) := (B^1(t), \dots, B^n(t))$ (**moto browniano n -dimensionale**). Sia pure $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ di misura di Lebesgue finita e strettamente positiva. Poniamo infine

$$S_A(\omega) := \{t \in \mathbb{R}^+ \mid B_t(\omega) \in A\}$$

(intuitivamente, S_A è il tempo trascorso in A dal moto browniano B).

1. Per $t > 0$, che legge e che densità ha il vettore aleatorio $B(t)$?
2. Detta λ la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$, dimostrare che

$$\mathbb{E}[\lambda(S_A)] = \begin{cases} +\infty & \text{se } m \leq 2, \\ \frac{1}{2\pi^{m/2}} \Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right) \int_A \|x\|^{2-m} dx & \text{se } m > 2. \end{cases}$$