Esercizi di Analisi Stocastica della 4^a settimana (Corso di Laurea Specialistica in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Sia B un moto browniano rispetto a $(\mathcal{F}_t)_t$, e $\mathcal{F}_\infty := \bigvee_t \mathcal{F}_t$.

1. Sia $\mathcal{G}$ una σ-algebra indipendente da $\mathcal{F}_\infty$ e poniamo $\tilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{F}_t \vee \mathcal{G}$, $t \geq 0$. Dimostrare che B è un moto browniano anche rispetto a $(\tilde{\mathcal{F}}_t)_t$.

2. Sia $\bar{\mathcal{F}}_t$ il completamento di $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$. Dimostrare che B è un moto browniano anche rispetto a $(\bar{\mathcal{F}}_t)_t$.

Esercizio 2. Siano X e Y variabili aleatorie a valori rispettivamente in $(E, \mathcal{E})$, $(G, \mathcal{G})$, e $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ una σ-algebra contenuta in $\mathcal{F}$ tale che X sia $\mathcal{F}'$-misurabile e Y sia indipendente da $\mathcal{F}'$. Vogliamo dimostrare che per ogni $f : E \times F \to \mathbb{R}$ misurabile e limitata, vale

$$\mathbb{E}[f(X,Y) \mid \mathcal{F}'] = h(X)$$

con $h(x) := \mathbb{E}[f(x,Y)]$.

1. Dimostrare la formula per $h(x,y) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(y)$, con $A \in \mathcal{E}$, $B \in \mathcal{G}$.

2. Dedurre la formula per h generale.

Esercizio 3. Sia B un moto browniano rispetto a $(\mathcal{F}_t)_t$ e $\eta \sim N(\mu, \rho^2)$ indipendente da B. Poniamo

$$Y_t := \eta t + \sigma B_t$$

e $\mathcal{G}_t := \sigma(Y_s | S \leq t)$. Vogliamo vedere se, a partire dall'osservazione del processo Y, possiamo stimare η.

1. Calcolare Cov (η, Y_s) e Cov (Y_s, Y_t) per $s < t$.

2. Mostrare che Y è un processo gaussiano.

3. Mostrare che per ogni $t \geq 0$ fissato esiste $\lambda(t)$ tale che $\eta = \lambda Y_t + Z$, con Z indipendente da $\mathcal{G}_t$.

4. Calcolare $\mathbb{E}[\eta \mid \mathcal{G}_t]$ e mostrare che $\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[\eta \mid \mathcal{G}_t] = \eta$ q.c.

Esercizio 4. Sia $\mathcal{G}$ una sotto-σ-algebra di $\mathcal{F}$ ed X un vettore aleatorio in $\mathbb{R}^d$ tale che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^d$ si ha

$$\mathbb{E}[e^{i\langle \lambda, X\rangle} \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[e^{i\langle \lambda, X\rangle}]$$

Dimostrare che X è indipendente da $\mathcal{G}$.