Esercizi di Analisi Stocastica della 5^a settimana (Corso di Laurea Specialistica in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Sia M una martingala in L^2.

1. Mostrare che $\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] = \mathbb{E}[M_t^2] - \mathbb{E}[M_s^2]$ per ogni $s < t$.
2. Se M è a incrementi indipendenti ed è una martingala rispetto alla sua filtrazione naturale, allora $\langle M \rangle_t = \mathbb{E}[(M_t - M_0)^2] = \mathbb{E}[M_t^2] - \mathbb{E}[M_0^2]$ è la sua variazione quadratica.
3. Se M è continua ed è una martingala non necessariamente rispetto alla sua filtrazione naturale, allora $\langle M \rangle_t = \mathbb{E}[(M_t - M_0)^2] = \mathbb{E}[M_t^2] - \mathbb{E}[M_0^2]$ è la sua variazione quadratica.
4. Se M è anche un processo gaussiano, allora è a incrementi indipendenti e il processo Z, definito da $Z_t := e^{\theta M_t - \frac{1}{2}\theta^2 \langle M \rangle_t}$, è una martingala rispetto alla sua filtrazione naturale per ogni $\theta \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Sia M una martingala continua non negativa tale che $M_0 = 1$ e $\lim_{t \to +\infty} M_t = 0$ q.c. Per $a > 1$ fissato, definiamo

$$\tau_a := \inf\{t \mid M_t \geq a\}$$

il primo tempo di passaggio per a. Denotiamo poi, come al solito, $X^* := \sup_{t \geq 0} X_t$ per un generico processo X.

1. Dimostrare che $\lim_{t \to +\infty} M_{t \wedge \tau_a} = a \mathbf{1}_{\{\tau_a < +\infty\}}$.
2. Dimostrare che M^* è quasi certamente finita ed ha la stessa legge di $1/U$, con $U \sim U(0,1)$.
3. Sia $X_t := B_t - \theta t$, con B moto browniano e $\theta > 0$. Dimostrare che X^* è quasi certamente finita ed ha legge $Exp(2\theta)$.

Esercizio 3. Sia B un moto browniano e $a, b > 0$. Definiamo

$$\tau := \inf\{t \mid B_t \notin [-a, b]\}$$

il tempo di uscita di B dall'intervallo $[-a, b]$.

1. Mostrare che $\tau < +\infty$ q.c.
2. Calcolare $\mathbb{P}\{B_\tau = -a\}$ e $\mathbb{P}\{B_\tau = b\}$.
3. Mostrare che $\tau \in L^1$ e calcolare $\mathbb{E}[\tau]$.

Suggerimento: ricordare che B e $(B_t^2 - t)_t$ sono martingale.

Esercizio 4. Consideriamo uno spazio $(\Omega, \mathcal{F})$ con una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$ e due misure di probabilità $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ tali che, per ogni $t > 0$, la restrizione $\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t}$ sia assolutamente continua rispetto all'analoga restrizione $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$ e di densità

$$Z_t := \frac{d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$$

1. Dimostrare che Z è una martingala rispetto a $\mathbb{P}$.
2. Dimostrare che $\{Z_t > 0\} \subseteq \{Z_s > 0\}$ per ogni $s < t$.
3. Dimostrare che $Z_t > 0$ $\mathbb{Q}$-quasi certamente per ogni t e che $1/Z$ è una $\mathbb{Q}$-supermartingala.
4. Se per ogni $t > 0$ si ha anche $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t} << \mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t}$, allora $1/Z$ è una $\mathbb{Q}$-martingala e

$$\frac{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t}} = \frac{1}{Z_t}$$