

**Esercizi di Analisi Stocastica della 6<sup>a</sup> settimana (Corso di Laurea Specialistica in Matematica, Università degli Studi di Padova).**

**Esercizio 1.** Sia  $B$  un moto browniano e  $0 < s < t$ . Calcolare:

1.  $\mathbb{E} \left[ B_s \int_0^t B_u dB_u \right];$
2.  $\mathbb{E} \left[ B_s^2 \left( \int_s^t B_u dB_u \right)^2 \right];$

**Esercizio 2.** Se  $X \in M^2[s, t]$ , con  $0 < s < t$ :

1. Dimostrare che  $\int_s^t X_u dB_u$  è scorrelata da  $B_v$  per ogni  $v \leq s$ .
2. Produrre un esempio di  $X$  per cui  $\int_s^t X_u dB_u$  non è indipendente da  $B_s$ .

**Esercizio 3.** Sia  $f \in L^2([s, t])$  e  $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  strettamente crescente e derivabile.

1. Mostrare che  $X := \int_s^t f(u) dB_u$  è indipendente da  $\mathcal{F}_s$ .
2. **(cambiamento di tempo)** Mostrare che

$$W_t := \int_0^{\varphi^{-1}(t)} \sqrt{\varphi'(u)} dB_u$$

è un moto browniano; rispetto a quale filtrazione?

**Esercizio 4.** Sia  $B$  un moto browniano. Dimostrare che per ogni  $t > 0$  vale:

1.  $\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds$
2.  $\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s ds$