Esercizi di Analisi Stocastica della 6^a settimana (Corso di Laurea Specialistica in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Sia B un moto browniano d-dimensionale e $X \in \Lambda^2[0,T]$ un processo a valori in $\mathbb{R}^d$ per una data filtrazione $(\mathcal{F}_t)_t$ e probabilità $\mathbb{P}$. Poniamo

$$Z_t := \exp\left(\int_0^t X_u \, dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t |X_u|^2 \, du\right)$$

per ogni $t \leq T$, dove $|\cdot|$ indica la norma euclidea in $\mathbb{R}^d$.

1. Calcolare il differenziale stocastico di Z.
2. Dimostrare che $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z_T] = 1$ se e solo se Z è una $\mathbb{P}$-martingala.
3. Supponiamo che Z sia una $\mathbb{P}$-martingala e definiamo $\mathbb{Q} := Z_T \cdot \mathbb{P}$. Allora Y è una $\mathbb{Q}$-martingala se e solo se YZ è una $\mathbb{P}$-martingala.
4. Se Z è una $\mathbb{P}$-martingala, allora $1/Z$ è una $\mathbb{Q}$-martingala.

Esercizio 2. Se $f \in C^1$ e B è un moto browniano, allora:

1. Dimostrare che $\int_0^t f(s) \, dB_s = f(t)B(t) - \int_0^t f'(s)B(s) \, ds$.
2. Calcolare Var $[X]$, con $X := \displaystyle\int_0^t \frac{B_s}{2\sqrt{t-s}} \, ds$.

Esercizio 3. Definiamo

$$X_t := x_0 e^{(b-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma B_t}, \quad t \geq 0$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}^+$, $b, \sigma \in \mathbb{R}$ e B è un moto browniano.

1. Dimostrare che $X \in M^2[0,T]$ per ogni $T \geq 0$.
2. Dimostrare che
$$dX_t = bX_t \, dt + \sigma \, dB_t \tag{1}$$
3. Supponiamo ora che X soddisfi l'equazione (1), che sia q.c. positivo e che $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^+$. Calcolare il differenziale stocastico di $\log X$ e dedurre X_t per ogni $t \geq 0$.

Un processo X con le caratteristiche di cui sopra si chiama **moto browniano geometrico**.

Esercizio 4. Sia $X \in \Lambda^1$ e di Itô tale che soddisfi

$$dX_t = a(b - X_t) \, dt + \sigma \, dW_t \tag{2}$$

con $a, b, \sigma \in \mathbb{R}$ e $X_0 \in \mathbb{R}$.

1. Calcolare il differenziale stocastico di $(e^{at}X_t)_t$.
2. Dedurne un'espressione per X_t.
3. Dimostrare che se X è un processo come al punto 2, allora soddisfa l'equazione (2).
4. Dimostrare che X è un processo gaussiano e calcolarne $\mathbb{E}[X_t]$ e Cov (X_s, X_t) per ogni $0 \leq s \leq t$.

Un processo X con le caratteristiche di cui sopra si chiama **processo di Ornstein-Uhlenbeck**.