Esercizi di Analisi Stocastica della 8^a settimana (Corso di Laurea Specialistica in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Consideriamo poi lo spazio $\mathcal{C} := C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ e la σ-algebra $\mathcal{M} := \mathcal{B}(\mathcal{C})$, dove come topologia su $\mathcal{C}$ si prende quella della convergenza sui compatti; supponiamo poi che per un generico processo X l'applicazione $\omega \to x(\omega)(\cdot)$ definita da $x(\omega)(t) := X_t(\omega)$ sia $(\mathcal{F}, \mathcal{M})$-misurabile (lo spazio $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ si chiama **spazio canonico**). Definiamo infine la filtrazione $(\mathcal{M}_t)_t$ su $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ tramite $\mathcal{M}_t := \sigma(x(u) \mid u \leq t)$.
Consideriamo poi un moto browniano $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_t, (B_t)_t)$ ed altri due processi definiti da $Y_t := B_t + ct$, $Z_t := \sigma B_t$, $t \geq 0$, con $c \neq 0$, $\sigma \neq \pm 1$, come variabili aleatorie su $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ e le relative leggi $\mathbb{P}_B$, $\mathbb{P}_Y$, $\mathbb{P}_Z$.

1. Dimostrare che $\mathbb{P}_B$ e $\mathbb{P}_Y$ sono equivalenti su $\mathcal{M}_t$ per ogni $t \geq 0$.

2. Calcolare la probabilità di $\{\lim_{t \to +\infty} x(t) = +\infty\}$ rispetto a $\mathbb{P}_B$ e a $\mathbb{P}_Y$, e dedurne che $\mathbb{P}_B$ e $\mathbb{P}_Y$ sono ortogonali su $\mathcal{M}$.

3. Calcolare
$$\limsup_{t \to 0^+} \frac{x(t)}{\sqrt{2t \log \log 1/t}}$$
sia sotto $\mathbb{P}_B$ che sotto $\mathbb{P}_Z$, e dedurne che $\mathbb{P}_B$ e $\mathbb{P}_Z$ sono ortogonali su $\mathcal{M}_t$ per ogni $t \geq 0$.

Esercizio 2. Sia X il processo m-dimensionale soluzione dell'equazione differenziale stocastica
$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)\ dt + \sigma(t, X_t)\ dB_t \quad \forall t \in [s, T], \\ \\ X_s = \eta \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_s, \mathbb{P}; \mathbb{R}^m) \end{cases}$$
con $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m \times d}$ che soddisfano le Ipotesi (A), B moto browniano d-dimensionale. Assegnata $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m)$, poniamo
$$M_t := f(t, X_t) - f(s, X_s) - \int_s^t (A_u f)(u, X_u)\ du$$
dove $A_u f := f_t + \sum_{i=1}^m b_i f_{x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m a_{ij} f_{x_i x_j}$, con $a := \sigma \sigma^*$.

1. Dimostrare che M è una martingala locale.

2. Dimostrare che, se $f \in C_b^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m)$, allora M è una martingala.

3. Se $f \in C_b^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m)$ è una soluzione di $A_u f = 0$ per ogni $u, x \in [s, T] \times \mathbb{R}^m$, allora $f(s, x) = \mathbb{E}[f(T, X_T^{s,x})]$.

Esercizio 3. Vogliamo dimostrare che il processo X definito da $X_t := \frac{x}{1-xB_t}$, $t \geq 0$, con $x \neq 0$, B moto browniano, è soluzione di

$$\begin{cases} dX_t = X_t^3\ dt + X_t^2\ dB_t \quad \forall t \in [0, \tau_{1/x}), \\ X_0 = x \end{cases} \tag{1}$$

dove $\tau_y := \inf\{t \mid B_t = y\}$.

1. Sia $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f_\varepsilon(u) = \frac{x}{1-xu}$ per $u \leq \frac{1}{x} - \varepsilon$ e che sia C^2 su $\mathbb{R}$. Dimostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$,
$$X_{t\wedge\tau_{1/x-\varepsilon}} = x + \int_0^{t\wedge\tau_{1/x-\varepsilon}} X_u^3\ du + \int_0^{t\wedge\tau_{1/x-\varepsilon}} X_u^2\ dB_u$$
2. Dimostrare che, sull'evento $\{t < \tau_{1/x}\}$, X soddisfa l'equazione (1).
3. X è soluzione su $[0,T]$ per qualche $T > 0$? Come si concilia questo con il teorema di esistenza e unicità?

Esercizio 4. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}, (B_t)_{t\in[0,T]})$ un moto browniano tale che $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ e $\mathcal{F}_t = \bar{\mathcal{F}}_t^B$ per ogni $t \in [0,T]$. Sia poi $\mathbb{Q}$ equivalente a $\mathbb{P}$, e chiamiamo Z_T la relativa densità. Ricordiamo che, detta $Z_t := \frac{d\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}}$, si ha che Z è una $\mathbb{P}$-martingala.

1. Dimostrare che $Z_t > 0$ $\mathbb{P}$-q.c. per ogni $t \leq T$.
2. Dimostrare che esiste $\varphi \in \Lambda^2[0,T]$ tale che
$$Z_t = 1 + \int_0^t \varphi_s\ dB_s$$
3. Definiamo $\tau_n := \inf\{t \mid Z_t \leq \frac{1}{n}\}$. Mostrare che esiste un unico processo ψ tale che
$$Z_{t\wedge\tau_n} = \exp\left(\int_0^{t\wedge\tau_n} \psi_u\ dB_u - \frac{1}{2}\int_0^{t\wedge\tau_n} \psi_u^2\ du\right)$$
4. Dedurne che $Z_T = \exp\left(\int_0^T \psi_u\ dB_u - \frac{1}{2}\int_0^T \psi_u^2\ du\right)$.