Compitino di Calcolo delle Probabilità del 5 novembre 2003 (Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e $X \in L^+(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Chiamiamo μ la legge di X, e λ la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$. Definiamo l'insieme

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x\}$$

Dimostrare che:

a) $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

b) Calcolando la misura $(\mu \otimes \lambda)(A)$ in due modi diversi, dimostrare che

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}\{X > y\}\, dy$$

c) Se X è a valori in $\mathbb{N}$, dimostrare che

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X > n\}$$

Esercizio 2. Su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ siano $(X_n)_n$ e $(Y_n)_n$ due processi di Bernoulli indipendenti, rispettivamente di parametri p_1 e p_2; chiamiamo inoltre $q_i := 1 - p_i$, per $i = 1, 2$. Definiamo inoltre

$$T := \inf\{n \mid X_n = 1\}, \quad U := \inf\{n \mid Y_n = 1\}$$

Definiamo poi l'evento $H := \{T < U\}$.

a) Dimostrare che T e U sono indipendenti, e calcolarne la legge.

b) Calcolare $\mathbb{P}(H)$ (suggerimento: calcolare $\mathbb{P}(H \cap \{T = n\})$ per $n \in \mathbb{N}^*$).

c) Calcolare la legge di T sotto $\mathbb{P}(\cdot\ |H)$ (suggerimento: calcolare $\mathbb{P}(\{T = n\}\ |H)$ per $n \in \mathbb{N}^*$; allora ...).

Esercizio 3. Sia $(\lambda_n)_n$ una successione di numeri reali strettamente positivi tendente a $+\infty$. Su un opportuno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sia assegnata per ogni $n \geq 1$ una variabile aleatoria X_n avente legge di Poisson di parametro λ_n, e si ponga

$$Y_n := \frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}}$$

a) Calcolare la funzione caratteristica di Y_n.

b) La successione $(Y_n)_n$ converge in legge? Se sì, qual è la legge limite?

Soluzioni

Esercizio 1.

a) A è aperto in $\mathbb{R}^2$, quindi è boreliano.

b) La funzione $\mathbf{1}_A \in L^+$, quindi si può applicare il teorema di Tonelli:

$$\begin{aligned}(\mu\otimes\lambda)(A) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x,y)\ d\mu(x)\ dy = \int_0^\infty \int_{(y,+\infty)} d\mu(x)\ dy = \int_0^\infty \mu((y,+\infty))\ dy = \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}\{X>y\}\ dy \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x,y)\ dy\ d\mu(x) = \int_{(0,+\infty)}\int_{(0,x)} dy\ d\mu(x) = \int_{(0,+\infty)} x\ d\mu(x) = \\ &= \mathbb{E}[X]\end{aligned}$$

c) Se X è a valori in $\mathbb{N}$, allora $\mathbb{P}\{X>y\} = \mathbb{P}\{X>n\}$ per $y\in[n,n+1)$, e si ha

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathbb{P}\{X>y\}\ dy &= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}\{X>n\}\mathbf{1}_{[n,n+1)}(y)\ dy = \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} \mathbb{P}\{X>n\}\ dy = \\ &= \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}\{X>n\}\end{aligned}$$

dove si è utilizzato il teorema di integrazione per serie positive.

Esercizio 2.

a) Consideriamo le basi $(\{T>n\})_n$ e $(\{U>m\})_m$, rispettivamente basi di $\sigma(T)$ e $\sigma(U)$. Si ha che per ogni $n,m\in\mathbb{N}^*$ si può scrivere:

$$\{T>n\} = \{X_1 = \ldots = X_n = 0\}, \qquad \{U>m\} = \{Y_1 = \ldots = Y_m = 0\},$$

e questi due eventi sono indipendenti. Inoltre $\{T>0\} = \{U>0\} = \Omega$ è indipendente da ogni evento. La conclusione è che le due σ-algebre $\sigma(T)$ e $\sigma(U)$ sono indipendenti tra di loro per il criterio di indipendenza fondato su due basi, e quindi T e U sono indipendenti. Infine, la loro legge è $T\sim Ge(p_1)$ e $U\sim Ge(p_2)$.

b) Per ogni $n\in\mathbb{N}^*$ abbiamo:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H\cap\{T=n\}) &= \mathbb{P}\{T<U, T=n\} = \mathbb{P}\{U>n, T=n\} = \\ &= \mathbb{P}\{T=n\}\mathbb{P}\{U>n\} = p_1 q_1^{n-1} q_2^n\end{aligned}$$

e quindi

$$\mathbb{P}(H) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(H\cap\{T=n\}) = \sum_{n=1}^\infty p_1q_2(q_1q_2)^{n-1} = p_1q_2\sum_{k=0}^\infty (q_1q_2)^k = \frac{p_1q_2}{1-q_1q_2}$$

c) Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ abbiamo:

$$\mathbb{P}(\{T = n\} \mid H) = \frac{\mathbb{P}(\{T = n\} \cap H)}{\mathbb{P}(H)} = (1 - q_1 q_2)(q_1 q_2)^{n-1}$$

Questo significa che la legge di T sotto $\mathbb{P}(\cdot \mid H)$ è $Ge(q_1 q_2)$.

Esercizio 3.

a)

$$\varphi_{Y_n}(t) = \varphi_{X_n - \lambda_n}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\right) = \varphi_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\right)\varphi_{-\lambda_n}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\right) = \exp\left(\lambda_n(e^{i\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}} - 1)\right)e^{-it\sqrt{\lambda_n}}$$

b) La successione $(Y_n)_n$ converge in legge se e solo se la successione $(\varphi_{Y_n})_n$ converge puntualmente su un opportuno insieme. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \varphi_{Y_n}(t) &= \exp\left(\lambda_n\left(1 + i\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{\lambda_n} + o(\lambda_n^{-3/2}) - 1\right) - it\sqrt{\lambda_n}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}t^2 + \lambda_n o(\lambda_n^{-3/2})\right) \end{aligned}$$

Per $n \to \infty$, abbiamo $\lambda_n \to +\infty$, e quindi $\lambda_n o(\lambda_n^{-3/2}) \simeq \lambda_n^{-1/2} \to 0$. Questo significa che $\varphi_{Y_n}(t) \to \exp(-\frac{1}{2}t^2)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, e quindi per il teorema di Paul Levy che $Y_n \rightharpoonup N(0,1)$.

Compitino di Probabilità del 5 novembre 2003 (Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova) (docente: Tiziano Vargiolu)

Hanno superato la prova:

Bettiol Francesca	23,5
Bobbo Alessia	26
Boscardin Antonio	16,5
Carraro Ketty	18
Corso Marta	17
Crisci Maria Grazia	19
Donolato Michele	19
Frigo Nadia	19
Rossin Silvia	19
Salafia Giovanni	28,5
Saletti Gerardo	27
Villani Giovanna	23

Visione compiti: in studio (stanza 126)