Compitino di Calcolo delle Probabilità del 3 dicembre 2003 (Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie reali di legge $X_n \sim \Gamma(n, \lambda)$, con $\lambda > 0$.
Dimostrare che:

a) Dimostrare che $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{\lambda}$.

b) Dimostrare che $\mathbb{P}\{\frac{X_n}{n} > \frac{1}{\lambda}\} = \frac{1}{2}$.

Suggerimento per entrambi i punti: se consideriamo una successione $(Z_n)_n$ di variabili aleatorie i.i.d. di legge $Exp(\lambda)$, allora $Z_1 + \ldots + Z_n$ ha la stessa legge di X_n. Allora ...

Esercizio 2. Siano X, Y variabili aleatorie indipendenti, entrambe di legge $N(0, \sigma^2)$, con $\sigma^2 > 0$. Calcolare la legge condizionale di X rispetto a $X + Y$.

Esercizio 3. Sia $X = (X_n)_n$ un processo stocastico tale che $(X_n)_n \subset L^1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = aX_n + (1-a)X_{n-1}$$

dove $(\mathcal{F}_n)_n$ è la filtrazione naturale di X, e $a \in (0, 1)$. Per ogni $n \geq 1$ definiamo $S_n := \alpha X_n + X_{n-1}$.

a) Dimostrare che $S_n \in L^1$ per ogni $n \geq 1$.

b) Determinare α tale che S sia una martingala rispetto a $(\mathcal{F}_n)_n$.

Soluzioni

Esercizio 1.

a) In realtà questo punto si può fare anche senza il suggerimento, in altri due modi. Il primo è fare i conti direttamente come nella dimostrazione della legge debole di Rajchmann: per ogni $\delta > 0$ si ha che

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{\lambda}\right| > \delta\right\} = \mathbb{P}\left\{\left|X_n - \frac{n}{\lambda}\right| > \delta n\right\} \leq \frac{\text{Var}\,[X_n]}{\delta^2 n^2} = \frac{1}{\lambda^2 \delta^2 n}$$

che per $n \to \infty$ converge a 0.

Il secondo modo usa il fatto che, se il limite è una costante, la convergenza in legge e la convergenza in probabilità sono equivalenti. Per il teorema di Paul Levy, basta allora dimostrare la convergenza puntuale delle funzioni caratteristiche alla funzione caratteristica. Si ha che

$$\varphi_{X_n/n}(t) = \varphi_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\frac{1}{1 - \frac{it}{n\lambda}}\right)^n = \left(1 + \frac{it}{n\lambda} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \to e^{it\frac{1}{\lambda}}$$

che è la funzione caratteristica della costante $\frac{1}{\lambda}$, e si ha la tesi.

Vediamo ora come si può giungere allo stesso risultato usando il suggerimento. Bisogna dimostrare che per ogni $\delta > 0$, $\mathbb{P}\{|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{\lambda}| > \delta\} \to 0$ per $n \to \infty$. Allora, se consideriamo le variabili $(Z_n)_n$ del suggerimento, abbiamo che

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{\lambda}\right| > \delta\right\} = \mathbb{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i - \frac{1}{\lambda}\right| > \delta\right\} \to 0$$

per la legge debole dei grandi numeri (qui sono verificate sia le ipotesi di Rajchmann che quelle di Kolmogorov-Khintchine), poichè $\mathbb{E}[Z_1] = \frac{1}{\lambda}$.

b) Sfruttando ancora il suggerimento, si ha che

$$\mathbb{P}\left\{\frac{X_n}{n} > \frac{1}{\lambda}\right\} = \mathbb{P}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i - \frac{1}{\lambda} > 0\right\} = \mathbb{P}\left\{\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i - \frac{1}{\lambda}}{\text{Var}\,\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\right]} > 0\right\} \to N(0) = \frac{1}{2}$$

dove la conclusione segue dal teorema limite centrale.

Esercizio 2. Questo esercizio si può fare in due modi, che portano entrambi allo stesso risultato. Il modo più meccanico è quello di calcolare la legge congiunta del vettore $(X, X+Y)$ ed applicare la formula vista a lezione. Sappiamo che il vettore (X, Y) ha densità congiunta $f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp(-\frac{1}{2}(\frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{y^2}{\sigma^2}))$ rispetto alla misura di Lebesgue bidimensionale λ_2. Allora il vettore aleatorio $(X, X + Y)$ si ottiene tramite il diffeomorfismo $\varphi(x, y) := (x, x + y) =: (x, z)$, che è tale che $|\det D\varphi^{-1}| \equiv 1$ e $\varphi^{-1}(x, z) = (x, y) = (x, z - x)$. Allora la densità congiunta del vettore $(X, X + Y)$ rispetto a λ_2 è data da

$$f_{XZ}(x, z) = f_{XY}(\varphi^{-1}(x, z))|\det D\varphi^{-1}(x, z)| = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma^2} + \frac{(z-x)^2}{\sigma^2}\right)\right)$$

Una versione della densità marginale di $X+Y$ è

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{z^2}{2\sigma^2}\right)$$

(ricordiamo che $X+Y \sim N(0,2\sigma^2)$). Per la formula vista a lezione, una versione della legge condizionale di X rispetto a $X+Y$ è data dalla famiglia $(\nu_z)_{z>0}$, dove ν_z ha densità, rispetto alla misura di Lebesgue sulla retta, pari a

$$\frac{\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma^2}+\frac{(z-x)^2}{\sigma^2}\right)\right)}{\frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{z^2}{2\sigma^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\frac{z}{2})^2}{\sigma^2/2}\right)$$

che è la densità di una legge normale $N(\frac{z}{2},\frac{\sigma^2}{2})$.
Il secondo modo è il seguente: per ogni $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ misurabile, ricordando che $X+Y \sim N(0,2\sigma))$ e raccogliendo la sua densità, si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X,X+Y)] &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,x+y)\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma^2}+\frac{y^2}{\sigma^2}\right)\right)\,dx\,dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,z)\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2+(z-x)^2}{\sigma^2}\right)\,dx\,dz = \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,z)\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\frac{z}{2})^2}{\sigma^2/2}\right)\,dx\right)\frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{z^2}{2\sigma^2}\right)\,dz
\end{aligned}$$

Anche qui si ricava che X ha legge normale $N(\frac{X+Y}{2},\frac{\sigma^2}{2})$ condizionatamente a $X+Y$.

Esercizio 3.

a) Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ calcoliamo:

$$\|S_n\|_1 \le |\alpha|\cdot\|X_n\|_1 + \|X_{n-1}\|_1 < +\infty$$

e quindi $S_n \in L^1$.

b) Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\alpha X_n + X_{n-1} \mid \mathcal{F}_n] = \alpha(aX_n+(1-a)X_{n-1}) + X_n = \\
&= (\alpha a+1)X_n + \alpha(1-a)X_{n-1}
\end{aligned}$$

Se vogliamo che questa quantità sia uguale a $S_n = \alpha X_n + X_{n-1}$, dobbiamo avere che

$$\begin{cases} \alpha a + 1 = \alpha \\ \alpha(1-a) = 1 \end{cases}$$

che è possibile se e solo se $\alpha = \frac{1}{1-a}$.

Compitino di Probabilità del 3 dicembre 2003 (Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova) (docente: Tiziano Vargiolu)

Sono ammessi all'orale:

	5/11	3/12	Media
Bettiol Francesca	23,5	31	27
Bobbo Alessia	26	32	29
Boscardin Antonio	16,5	21	20
Carraro Ketty	18	22,5	20
Crisci Maria Grazia	19	21	20
Donolato Michele	19	22	20,5
Frigo Nadia	19	30	24,5
Rossin Silvia	19	16	17,5
Salafia Giovanni	28,5	26	27
Saletti Gerardo	27	20	23,5
Villani Giovanna	23	32	27,5

Visione compiti e orali: giovedì 4 ore 10.00 in studio (stanza 126)