Compitino di Calcolo delle Probabilità del 9 novembre 2005 (Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Sia X una variabile aleatoria reale quasi certamente finita definita sullo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dimostrare che:

a) $\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}\{|X| > t\} = 0$

b) Se $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora $g(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(X)$.

Esercizio 2. Due giocatori A e B dispongono di un'urna contenente r palline rosse e b palline bianche. Essi giocano una successione di partite, ciascuna delle quali consiste in un'estrazione (con rimessa) eseguita dal giocatore A, e in un'analoga operazione eseguita dal giocatore B. Il gioco si arresta non appena si giunga a una partita con risultati diversi per i due giocatori: vince allora 1 Euro il giocatore che, in questa partita, abbia estratto pallina rossa.

a) Si definiscano, su un opportuno spazio probabilizzato, due variabili aleatorie N, V che rappresentino rispettivamente la durata del gioco (ossia il numero di partite giocate) e la vincita di A (espressa in Euro).

b) Calcolare la legge di N.

c) Calcolare la legge di V.

d) Dimostrare che V è indipendente da N.

Esercizio 3. Sia $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. di legge $N(0, 1)$, e si ponga $S_n := X_1 + \ldots + X_n$. Sia inoltre α un fissato numero reale. Utilizzando l'uguaglianza

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

a) Si dica che legge ha $S_1 + \ldots + S_n$.

b) Si calcoli la funzione caratteristica di $\frac{S_1 + \ldots + S_n}{n^\alpha}$.

c) Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la variabile aleatoria $\frac{S_1 + \ldots + S_n}{n^\alpha}$ converge in legge, e calcolarne il limite.

Soluzioni

Esercizio 1.

a) Innanzitutto notiamo che se $s < t$, allora $\{|X| > s\} \supseteq \{|X| > t\}$, e quindi $\mathbb{P}\{|X| > s\} \geq \mathbb{P}\{|X| > t\}$. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}\{|X| > t\} &\leq \lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}\{|X| > [t]\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|X| > n\} = \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{|X| > n\}\right) = \mathbb{P}\{|X| = +\infty\} = 0\end{aligned}$$

dove si è usata la continuità dall'alto della probabilità, e $[t]$ indica la parte intera di t.

b) Il punto a) significa che per ogni $\eta > 0$ esiste $M > 0$ tale che $\mathbb{P}\{|X| > M\} < \eta$. Siccome g è continua, allora è uniformemente continua sull'intervallo $[-M, M]$, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|x - y| < \delta$ implica $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$ per ogni $x, y \in [-M, M]$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{|g(X_n) - g(X)| > \varepsilon\} &\leq \mathbb{P}(\{|X_n - X| > \delta\} \cup \{|X| > M\}) \leq \\ &\leq \mathbb{P}\{|X_n - X| > \delta\} + \mathbb{P}\{|X| > M\} \leq \mathbb{P}\{|X_n - X| > \delta\} + \eta\end{aligned}$$

Ma il primo addendo, per $n \to \infty$, tende a zero, quindi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|g(X_n) - g(X)| > \varepsilon\} \leq \eta$$

Siccome questo succede per ogni $\eta > 0$ arbitrario, segue la tesi.

Esercizio 2.

a) Possiamo rappresentare le estrazioni dei due giocatori con due processi di Bernoulli $(X_n)_n$ e $(Y_n)_n$ indipendenti, entrambi di parametro $p := r/(b + r)$, in cui il risultato "1" rappresenta l'estrazione della pallina rossa. Allora possiamo definire:

$$N := \min\{n \mid X_n \neq Y_n\}, \qquad V := X_N$$

b) La variabile aleatoria N può assumere solo valori interi positivi. Per ogni $k \in \mathbb{N}^*$ abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{N = k\} &= \mathbb{P}\{X_1 = Y_1, \ldots, X_{k-1} = Y_{k-1}, X_k \neq Y_k\} = \\ &= \mathbb{P}\{X_1 = Y_1\} \times \ldots \times \mathbb{P}\{X_{k-1} = Y_{k-1}\} \times \mathbb{P}\{X_k \neq Y_k\}\end{aligned}$$

dove si è utilizzata l'indipendenza delle variabili aleatorie $(X_n)_n$ e $(Y_n)_n$. Si ha poi, per ogni $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\{X_n = Y_n\} = \mathbb{P}\{X_n = Y_n = 0\} + \mathbb{P}\{X_n = Y_n = 1\} = p^2 + (1 - p)^2 = \frac{r^2 + b^2}{(r + b)^2}$$

e di conseguenza $\mathbb{P}\{X_n \neq Y_n\} = \frac{2rb}{(r+b)^2}$. Allora $\mathbb{P}\{N = k\} = (1 - q)^{k-1}q$, dove $q := \frac{2rb}{(r+b)^2}$. N ha quindi legge geometrica di parametro q.

c,d) Per risolvere questi due punti è sufficiente calcolare la legge congiunta di (V, N): siccome V può assumere solo i valori 0 e 1, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{V=0, N=k\} &= \mathbb{P}\{X_N = 0, N=k\} = \mathbb{P}\{X_k = 0, N=k\} = \\
&= \mathbb{P}\{X_1 = Y_1, \ldots, X_{k-1} = Y_{k-1}, X_k = 0 \neq Y_k\} = \\
&= \mathbb{P}\{X_1 = Y_1, \ldots, X_{k-1} = Y_{k-1}, X_k = 0, Y_k = 1\} = \\
&= \mathbb{P}\{X_1 = Y_1\} \times \ldots \times \mathbb{P}\{X_{k-1} = Y_{k-1}\} \times \mathbb{P}\{X_k = 0\} \times \mathbb{P}\{Y_k = 1\} = \\
&= (1-q)^{k-1} \frac{br}{(r+b)^2} = \frac{1}{2} q (1-q)^{k-1}
\end{aligned}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{V=1, N=k\} &= \mathbb{P}\{N=k\} - \mathbb{P}\{V=0, N=k\} = (1-q)^{k-1} q - (1-q)^{k-1} \frac{br}{(r+b)^2} = \\
&= (1-q)^{k-1} \frac{br}{(r+b)^2} = \frac{1}{2} q (1-q)^{k-1}
\end{aligned}$$

quindi la legge congiunta è fattorizzabile in una legge geometrica di parametro p e una legge di Bernoulli di parametro 1/2. Quindi $V \sim Be(1/2)$ ed è indipendente da N.

Esercizio 3.

a) Possiamo scrivere $S_1 + \ldots + S_n$ in questo modo:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} X_j = \sum_{j=1}^{n} (n-j+1) X_j$$

e questa è una somma di gaussiane indipendenti. Allora $S_1 + \ldots + S_n$ è gaussiana di media

$$E[S_1 + \ldots + S_n] = \sum_{j=1}^{n} (n-j+1) E[X_j] = 0$$

e varianza

$$\text{Var}\,[S_1 + \ldots + S_n] = \sum_{j=1}^{n} (n-j+1)^2 \text{Var}\,[X_j] = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

b) Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\varphi_{\sum_{i=1}^n S_i / n^\alpha}(t) &= \varphi_{\sum_{i=1}^n S_i}\left(\frac{t}{n^\alpha}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \frac{t^2}{n^{2\alpha}}\right) = \\
&= \exp\left(-\frac{(n+1)(2n+1)}{12 n^{2\alpha - 1}} t^2\right)
\end{aligned}$$

c) Per n grande, abbiamo

$$\varphi_{\sum_{i=1}^n S_i / n^\alpha}(t) \simeq \exp\left(-\frac{1}{6 n^{2\alpha - 3}} t^2\right)$$

quindi, utilizzando il teorema di Paul Levy, si ha:

- per $\alpha = 3/2$, si ha convergenza in legge verso $N(0, \frac{1}{3})$;
- per $\alpha > 3/2$, si ha convergenza in legge verso δ_0;
- per $\alpha < 3/2$, non si ha convergenza in legge.

Compitino di Probabilità del 9 novembre 2005 (Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova) (docente: Tiziano Vargiolu)

Risultati (in trentesimi):

Albertini Ilaria	4
Bettanini Jacopo	4
Carraro Ketty	13
Catalano Michela	13,5
Corso Marta	2
Danzi Silvia	22
Darriba Pol Laura	12
De Rossi Giulia	17
Dünnhofer Davide	5
Filippi Daniela	5
Galesso Giorgia	10
Garrell Zulueta Anais	14
Marchioni Marcello	14
Marcigot Wally	7
Meneghini Daniele	3
Porcellato Claudia	0
Ramo Valentina	15
Rosestolato Mauro	25,5
Rossignolo Eleonora	6
Spimpolo Doris	6
Villarrubias Gemma	10,5

Visione compiti: in studio (stanza 126)