Esame di Calcolo delle Probabilità mod. B del 9 settembre 2003 (Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1.

a) Supponiamo che $X_n \sim Po(n)$; dimostrare che

$$Y_n := \frac{X_n - \mathbb{E}[X_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}\,[X_n]}} \rightharpoonup N(0,1)$$

(suggerimento: usare le funzioni caratteristiche)

b) Usando il punto a), dimostrare che

$$e^{-n}\left(1 + n + \frac{n}{2} + \ldots + \frac{n^n}{n!}\right) \to \frac{1}{2}$$

Esercizio 2. Siano $(X_n)_n$ variabili aleatorie tali che Var $[X_n] < c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per qualche $c \in \mathbb{R}^+$. Mostrare che $(X_n)_n$ soddisfa la legge debole dei grandi numeri, nel senso che $\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i])/n$ converge in probabilità a 0, se il **coefficiente di correlazione**, definito da

$$\rho(X_i, X_j) := \frac{\mathrm{Cov}\,(X_i, X_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}\,[X_i]\mathrm{Var}\,[X_j]}}$$

soddisfa una delle due relazioni

a) $\rho(X_i, X_j) \leq 0$ per ogni $i \neq j$;

b) $\rho(X_i, X_j) \to 0$ per $|i - j| \to \infty$

(suggerimento: ricordarsi come si dimostra la legge debole per variabili aleatorie scorrelate).

Esercizio 3. Siano X, Y variabili aleatorie indipendenti, rispettivamente di legge $Po(\lambda)$ e $Po(\mu)$, con $\lambda, \mu > 0$. Calcolare la legge condizionale di X rispetto a $X + Y$.

Esercizio 4. Due giocatori, A e B, giocano a testa o croce con una moneta "truccata" tale che ad ogni lancio $\mathbb{P}\{\text{testa}\} = p$, $\mathbb{P}\{\text{croce}\} = q$, $p + q = 1$. Ad ogni "testa" il giocatore A vince 1 Euro dal giocatore B, e viceversa ad ogni "croce". Chiamiamo a e b i capitali iniziali rispettivamente dei giocatore A e B, e X_n il capitale del giocatore A dopo l'n-esimo lancio (quindi $X_0 = a$). Il gioco termina quando $X_n = 0$ o $X_n = a + b$, cioè quando uno dei due giocatori è al verde (dopo di allora, i giocatori possono continuare a giocare, ma senza effetti sui rispettivi capitali). Il giocatore B è sempre disposto a giocare, mentre il giocatore A può decidere quando smettere.

1. Dimostrare che $(X_n)_n$ è una catena di Markov; specificare spazio degli stati, legge iniziale e matrice di transizione (suggerimento: la matrice di transizione è della forma

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & q & 0 & p \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Supponiamo che A possa giocare al massimo N volte e voglia massimizzare la sua vincita attraverso il funzionale $\mathbb{E}[\gamma^\tau X_\tau]$, dove $\gamma \in (0, 1)$ è un "tasso di sconto" (più passa il tempo, meno vale la vincita), e τ è il tempo di arresto che rappresenta l'istante in cui A smette di giocare. Trovare il massimo del funzionale ed un tempo di arresto ottimale con il consueto algoritmo

$$\begin{aligned} V_N(x) &= \varphi(x) \\ V_{n-1}(x) &= \max(\varphi(x), \gamma(PV_n)(x)) \end{aligned}$$

nel caso in cui $p \le q$.

Soluzioni

Esercizio 1.

a) Per le regole di calcolo delle funzioni caratteristiche, per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\varphi_{Y_n}(t) = \varphi_{X_n - n}(\frac{t}{\sqrt{n}}) = \varphi_{X_n}(\frac{t}{\sqrt{n}})\varphi_{-n}(\frac{t}{\sqrt{n}}) = \exp\left(n(e^{i\frac{t}{\sqrt{n}}} - 1\right) \exp\left(-i\frac{t}{\sqrt{n}}n\right)$$

Dato che dobbiamo calcolare il limite per $n \to \infty$, sviluppiamo in serie l'esponenziale interno:

$$\begin{aligned} \varphi_{Y_n}(t) &= \exp\left(n(1 + i\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\frac{t^2}{n} + o(\frac{1}{n}) - 1 - it\sqrt{n}\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}t^2 + o(\frac{1}{n})\right) \end{aligned}$$

Facendo il limite per $n \to \infty$, si ottiene $\exp(-\frac{1}{2}t^2)$, che è la funzione caratteristica di una legge $N(0,1)$. La tesi segue dal fatto che la convergenza in legge è equivalente alla convergenza puntuale delle funzioni caratteristiche.

b) La somma da calcolare al primo membro non è altro che $\mathbb{P}\{X_n \leq n\}$. Abbiamo quindi:

$$\mathbb{P}\{X_n \leq n\} = \mathbb{P}\{X_n - n \leq 0\} = \mathbb{P}\{Y_n \leq 0\}$$

Dato che la convergenza in legge è equivalente alla convergenza delle funzioni di ripartizione in ogni punto di continuità della funzione di ripartizione della legge limite, si ha

$$\mathbb{P}\{X_n \leq n\} = \mathbb{P}\{Y_n \leq 0\} \to \mathbb{P}\{Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$$

dove Y è una qualunque variabile aleatoria di legge $N(0,1)$.

Esercizio 2. Usando la diseguaglianza di Chebicev, abbiamo che per ogni $\delta > 0$

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i])}{n}\right| > \delta\right\} = \mathbb{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i])\right| > \delta n\right\} \leq \\ &\leq \frac{\text{Var}\,[\sum_{i=1}^n X_i]}{\delta^2 n^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{Var}\,[X_i] + 2\sum_{i<j} \text{Cov}\,(X_i, X_j)}{\delta^2 n^2} \leq \frac{c}{\delta^2 n} + \frac{2\sum_{i<j} \text{Cov}\,(X_i, X_j)}{\delta^2 n^2} \end{aligned}$$

a) Se $\rho(X_i, X_j) < 0$, allora anche Cov $(X_i, X_j) < 0$, e si ha:

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i])}{n}\right| > \delta\right\} \leq \frac{c}{\delta^2 n} \to 0$$

b) L'ipotesi significa che per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$ esiste $I \in \mathbb{N}$ tale che $|i-j| > I$ implica $\rho(X_i, X_j) < \varepsilon$, e quindi Cov $(X_i, X_j) \leq \varepsilon c$. Ricordiamo che in ogni caso $\rho(X_i, X_j) < 1$, quindi Cov $(X_i, X_j) \leq c$. Allora

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{\left|\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}[X_i])}{n}\right| > \delta\right\} \leq \\
\leq \; & \frac{c}{\delta^2 n} + 2\frac{\sum_{i<j,|i-j|>I} \text{Cov } (X_i, X_j)}{\delta^2 n^2} + 2\frac{\sum_{i<j,|i-j|\leq I} \text{Cov } (X_i, X_j)}{\delta^2 n^2} \leq \\
\leq \; & \frac{c}{\delta^2 n} + \frac{n(n-1)\varepsilon c}{\delta^2 n^2} + 2\frac{nIC}{\delta^2 n^2} \to \frac{\varepsilon c}{\delta^2}
\end{aligned}$$

Siccome ε può essere preso piccolo a piacere, si ha la tesi.

Esercizio 3. Sappiamo che $X + Y \sim Po(\lambda + \mu)$. Poichè $X + Y$ ha legge discreta, l'unica versione della legge condizionale di X rispetto a $X + Y$ sarà data dalla disintegrazione $(\nu_z)_z$, dove

$$\nu_z(B) = \mathbb{P}\{X \in B \mid X + Y = z\}$$

Poichè anche X ha legge discreta, per caratterizzare $(\nu_z)_z$ è sufficiente calcolare le quantità

$$\begin{aligned}
\nu_z(\{k\}) &= \mathbb{P}\{X = k \mid X + Y = z\} = \frac{\mathbb{P}\{X = k, X + Y = z\}}{\mathbb{P}\{X + Y = z\}} = \\
&= \frac{\mathbb{P}\{X = k, Y = z - k\}}{\mathbb{P}\{X + Y = z\}} = \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\frac{\mu^{z-k}}{(z-k)!}}{e^{-\lambda-\mu}\frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}} = \\
&= \frac{z!\lambda^k \mu^{z-k}}{k!(z-k)!(\lambda+\mu)^z} = \binom{z}{k} p^k (1-p)^{z-k}
\end{aligned}$$

dove abbiamo posto $p := \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$. Si ha quindi che la legge di X condizionata a $X + Y$ è una legge binomiale di parametri $X + Y$ è $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Esercizio 4.

a) Consideriamo le variabili aleatorie Y_n i.i.d. di legge discreta $\mathbb{P}\{Y_n = 1\} = p$, $\mathbb{P}\{Y_n = -1\} = q$, con l'interpretazione che $Y_n = 1$ se e solo se A vince all'estrazione n-esima. Se definiamo $Z_n := a + \sum_{i=1}^n Y_n$ e $\tau := \inf\{n \geq 1 \mid Z_n = 0 \text{ o } Z_n = a+b\}$, allora possiamo definire $X_n := Z_{n\wedge\tau}$ ed avere l'interpretazione del testo. Dalla definizione, X_n può assumere i valori interi da 0 ad $a+b$, quindi lo spazio degli stati è $E = \{0, 1, \dots, a+b\}$. Abbiamo poi che $\mathbb{P}\{X_0 = x_0\} = \mathbb{P}\{a = x_0\} = \delta_a(x_0)$, quindi la legge iniziale è δ_a. Per calcolare la matrice di transizione, bisogna distinguere due casi. Se $X_n = 0$ o $X_n = a + b$, allora sicuramente $\tau \leq n$, quindi $X_{n+1} = Z_\tau = X_n$ $\mathbb{P}$-q.c., e abbiamo la prima e l'ultima riga della matrice P. Se invece $X_n \neq 0, a+b$, allora sicuramente $\tau > n$ e si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n\} &= \mathbb{P}\{Z_n + V_{n+1} = x_{n+1} \mid Z_n = x_n\} = \\ &= \frac{\mathbb{P}\{Z_n = x_n, V_{n+1} = x_{n+1} - x_n\}}{\mathbb{P}\{Z_n = x_n\}}\end{aligned}$$

Siccome Z_n e V_{n+1} sono indipendenti, si ha

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n\} = \mathbb{P}\{V_{n+1} = x_{n+1} - x_n\} = \begin{cases} p & \text{se } x_{n+1} = x_n + 1 \\ \\ q & \text{se } x_{n+1} = x_n - 1 \end{cases}$$

e si ottengono tutte le righe di P che mancano.

b) In questo caso abbiamo che φ è la funzione identica (che indichiamo con $I(x) := x$). Allora

$$(PV_N)(x) = (PI)(x) \sum_{y=0}^{a+b} y P_{xy} = \begin{cases} 1 \cdot 0 = 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 \cdot (a+b) = a+b & \text{se } x = a+b \\ p(x+1) + q(x-1) = x + p - q & \text{se } x \neq 0, a+b \end{cases}$$

Siccome $p \leq q$, si ha che $x + p - q \leq x$, quindi $(PI)(x) \leq x$, e di conseguenza anche $\gamma(PI)(x) \leq x = I(x)$. Allora abbiamo che $V_{N-1}(x) = I(x)$, e per induzione si può dimostrare che $V_n(x) = I(x)$ per ogni $n = N, \dots, 0$. Allora si ha che il massimo del funzionale $\mathbb{E}[\gamma^\tau X_\tau]$ si raggiunge in $\hat{\tau} := \inf\{n \leq N \mid V_n(X_n) = \varphi(X_n)\} \equiv 0$, e vale $\mathbb{E}[\gamma^0 X_0] = V_0(X_0) = a$.

L'interpretazione del punto *b*) è che se A vuole massimizzare la vincita "deprezzando" il ritardo e la probabilità p di vincere una singola scommessa è minore della probabilità q di perderla, allora per lui è ottimale non iniziare nemmeno a giocare e tenersi il capitale iniziale!

Esame di Probabilità mod. B del 9 settembre 2003 (Corso di Laurea in Matematica, Universitá degli Studi di Padova) (docente: Tiziano Vargiolu)

Sono ammessi all'orale:

Callegaro Giorgia	20

Visione compiti e orali: giovedi' 11 settembre ore 10.00 nel mio studio