

Esame di Calcolo delle Probabilità del 15 dicembre 2003 (Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome

Nome

Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Consideriamo un processo di Bernoulli $(X_n)_n$ di parametro p , e per un $h \in \mathbb{N}^*$ consideriamo l'elemento $(x_1, \dots, x_h) \in \{0, 1\}^h$. Vogliamo dimostrare che la probabilità che nel processo di Bernoulli X prima o poi “esca” la stringa $(x_1, \dots, x_h)$ è 1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$A_n := \{X_{n+1} = x_1, \dots, X_{n+h} = x_h\}$$

e definiamo poi per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ le variabili aleatorie $Z_n := \mathbf{1}_{A_{(n-1)h}}$. Dimostrare che:

a) Z è un processo di Bernoulli di parametro $p^S(1-p)^{h-S}$, dove $S := \sum_{i=1}^h x_i$.

b)

$$\mathbb{P}\{\exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } X_{n+1} = x_1, \dots, X_{n+h} = x_h\} = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right)$$

c)

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{(n-1)h}^c\right) = 0$$

d) $\mathbb{P}\{\exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } X_{n+1} = x_1, \dots, X_{n+h} = x_h\} = 1$.

Esercizio 2. Preso un $K \in \mathbb{N}^*$, diciamo che la variabile aleatoria U ha legge **uniforme** su $\{0, \dots, K-1\}$ se

$$\mathbb{P}\{U = k\} = \frac{1}{K} \quad \text{per ogni } k = 0, \dots, K-1$$

Fissato un $K \in \mathbb{N}^*$, consideriamo ora una successione di variabili aleatorie $(U_n)_n$ i.i.d. di legge uniforme su $\{0, \dots, K-1\}$, e costruiamo, per ogni $n \geq 1$, la variabile aleatoria

$$X_n := \sum_{j=1}^n \frac{1}{K^j} U_j$$

a) Dimostrare che

$$\varphi_{U_n}(t) = \frac{1}{K} \frac{1 - e^{itK}}{1 - e^{it}}$$

b) Calcolare la funzione caratteristica di X_n .

c) Dedurre che la variabile aleatoria $K^n X_n$ ha legge uniforme su $\{0, \dots, K^n - 1\}$.

d) Dimostrare che $X_n \rightarrow U(0, 1)$ (la “solita” legge uniforme sull'intervallo $(0, 1)$).

e) Dimostrare che in effetti la convergenza è quasi certa, nel senso che esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n =: X$, che ha legge $U(0, 1)$ (suggerimento: dimostrare che $(X_n)_n$ è una successione crescente).

Esercizio 3. Siano X, Y variabili aleatorie indipendenti, entrambe di legge $Ge(p)$, con $p \in (0, 1)$. Calcolare la legge di $X + Y$ e la legge condizionale di X rispetto a $X + Y$.

Esercizio 4. Consideriamo una successione di variabili aleatorie $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. di legge $\mathbb{P}\{X_n = 1\} = \mathbb{P}\{X_n = -1\} = 1/2$, e per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ definiamo i processi

$$S_n := a + \sum_{i=1}^n X_i, \quad S_0 := a,$$

$$M_n := \sum_{i=0}^n S_i - \frac{1}{3} S_n^3$$

e la variabile aleatoria

$$T := \inf\{n \mid S_n = 0 \text{ o } S_n = K\},$$

dove $a, K \in \mathbb{N}$, $0 < a < K$.

- a) Dimostrare che S è una martingala.
- b) Dimostrare che M è una martingala.
- c) Dimostrare che T è un tempo di arresto rispetto alla filtrazione naturale di X .
- d) Supponendo che $T < +\infty$ q.c. e che $\mathbb{E}[M_{n \wedge T}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[M_T]$, dimostrare che

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=0}^T S_i \right] \leq \frac{1}{3} (K^3 - a^3) + a$$

Soluzioni

Esercizio 1.

- a) le $(Z_n)_n$ sono indipendenti, poichè per ogni n , Z_n dipende solo da $X_{(n-1)h+1}, \dots, X_{nh}$. Inoltre Z_n assume valori in $\{0, 1\}$, e

$$\mathbb{P}\{Z_n = 1\} = \mathbb{P}(A_{(n-1)h}) = \mathbb{P}\{X_{(n-1)h+1} = x_1, \dots, X_{nh} = x_h\} = p^S(1-p)^{h-S}$$

- b) se esiste n tale che $X_{n+1}(\omega) = x_1, \dots, X_{n+h}(\omega) = x_h$, allora $\omega \in A_n$, e viceversa. Allora

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\omega \mid \exists n \text{ tale che } X_{n+1}(\omega) = x_1, \dots, X_{n+h}(\omega) = x_h\} &= \\ &= \mathbb{P}\{\omega \mid \exists n \text{ tale che } \omega \in A_n\} = \mathbb{P}\left\{\omega \mid \omega \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right\} = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \end{aligned}$$

- c) Per il punto a) si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{(n-1)h}^c\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{Z_n = 0\}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^N \{Z_n = 0\}\right) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \mathbb{P}\{Z_n = 0\} = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 - p^S(1-p)^{h-S})^N = 0 \end{aligned}$$

- d) Per il punto b), la probabilità da calcolare è

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{(n-1)h}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{(n-1)h}^c\right) = 1 - 0 = 1$$

Esercizio 2.

- a) Usando la definizione di funzione caratteristica, si ha

$$\varphi_{U_n}(t) = \mathbb{E}[e^{itU_n}] = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} e^{itn} = \frac{1}{K} \frac{1 - e^{itK}}{1 - e^{it}}$$

- b) Calcoliamo

$$\varphi_{X_n}(t) = \varphi_{\sum_{j=1}^n K^{-j} U_j}(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_{U_j}\left(\frac{t}{K^j}\right) = \prod_{j=1}^n \frac{1}{K} \frac{1 - e^{i \frac{t}{K^j-1}}}{1 - e^{i \frac{t}{K^j}}} = \frac{1}{K^n} \frac{1 - e^{it}}{1 - e^{i \frac{t}{K^n}}}$$

dove per l'ultima uguaglianza si è sfruttato il fatto che il prodotto è un prodotto telescopico.

- c)

$$\varphi_{K^n X_n}(t) = \frac{1}{K^n} \frac{1 - e^{itK^n}}{1 - e^{it}}$$

da cui si deduce la tesi.

d) Sviluppando in serie l'esponenziale al denominatore, per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ottiene

$$\varphi_{X_n}(t) = \frac{1}{K^n} \frac{1 - e^{it}}{1 - 1 - i\frac{t}{K^n} - o(K^{-n})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^{it} - 1}{it}$$

Poichè il limite puntuale è la funzione caratteristica di una legge uniforme $U(0, 1)$, per il teorema di Paul Levy questo è equivalente alla tesi

- e) Poichè per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{n+1} - X_n = \frac{U_{n+1}}{K^{n+1}} \geq 0$ q.c., da questo si ricava che $(X_n)_n$ è una successione q.c. (non de)crescente. Inoltre è q.c. limitata dalla costante 1, quindi q.c. esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n$, che chiamiamo X . In altre parole, $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} X$. Dato che $X_n \rightharpoonup X$, si ha che X deve avere legge $U(0, 1)$.

Esercizio 3. Per ogni $k \in \mathbb{N}^*$ calcoliamo:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X + Y = k\} &= \sum_{n=1}^{k-1} \mathbb{P}\{X + Y = k, X = n\} = \sum_{n=1}^{k-1} \mathbb{P}\{Y = k - n\} \mathbb{P}\{X = n\} = \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} p(1-p)^{n-1} p(1-p)^{k-n-1} = p^2 \sum_{n=1}^{k-1} (1-p)^{k-2} = \\ &= (k-1)p^2(1-p)^{k-2} \end{aligned}$$

Siccome $X + Y$ è una variabile aleatoria discreta, per la teoria svolta durante il corso l'unica versione della legge condizionale di X rispetto a $X + Y$ è quella data dalla disintegrazione:

$$\nu_z(B) := \mathbb{P}\{X \in B \mid X + Y = z\} \quad \forall z \in \mathbb{N}^*, B \subseteq \mathbb{N}^*$$

Per caratterizzarla, basta calcolare per ogni $z \in \mathbb{N}^*$, $k = 1, \dots, z-1$ la quantità

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X = k \mid X + Y = z\} &= \frac{\mathbb{P}\{X = k, X + Y = z\}}{\mathbb{P}\{X + Y = z\}} = \frac{\mathbb{P}\{X = k, Y = z - k\}}{\mathbb{P}\{X + Y = z\}} = \\ &= \frac{p(1-p)^{k-1} p(1-p)^{z-k-1}}{(z-1)p^2(1-p)^{z-2}} = \frac{1}{z-1} \end{aligned}$$

che, secondo la definizione dell'esercizio 2, è una legge uniforme sull'insieme $\{1, \dots, X+Y-1\}$

Esercizio 4. Innanzitutto notiamo che la filtrazione naturale di X è uguale a quella di S (se si eccettua $\mathcal{F}_0^S = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_0^X$ che non è definito): infatti per ogni $n \geq 1$, S_n è funzione misurabile di $X_1, \dots, X_n$, e $X_n = S_n - S_{n-1}$ è quindi funzione misurabile di $S_1, \dots, S_n$.

a) Per ogni $n \geq 0$ si ha

$$\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n^X] = \mathbb{E}[S_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n^X] = S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n^X] = S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] = S_n$$

b) Per ogni $n \geq 1$, usando il fatto che S è una martingala si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n^S] &= \mathbb{E}\left[S_{n+1} - \frac{1}{3}(S_{n+1}^3 - S_n^3)|\mathcal{F}_n^S\right] = \\ &= S_n - \frac{1}{3}\mathbb{E}[S_n^3 + 3S_n^2X_{n+1} + 3S_nX_{n+1}^2 + X_{n+1}^3 - S_n^3|\mathcal{F}_n^S] = \\ &= S_n - S_n^2\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n^S] - S_n\mathbb{E}[X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n^S] - \frac{1}{3}\mathbb{E}[X_{n+1}^3|\mathcal{F}_n^S] = \\ &= S_n - S_n^2 \cdot 0 - S_n \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

c) Possiamo scrivere

$$T = \inf\{n \mid S_n \notin (0, K)\} = \inf\{n \mid S_n \notin \{1, \dots, K-1\}\}$$

Siccome S è un processo adattato e T è un tempo di uscita, si ha che T è un tempo di arresto.

d) Dal teorema di arresto, $(M_{n \wedge T})_n$ è una martingala. Siccome $T < +\infty$ q.c., si ha che $M_{n \wedge T}$ converge quasi certamente verso la variabile aleatoria M_T . Inoltre sappiamo che $\mathbb{E}[M_{n \wedge T}] \rightarrow \mathbb{E}[M_T]$. Allora

$$a - \frac{1}{3}a^3 = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_{n \wedge T}] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{T \wedge n} S_i - \frac{1}{3}S_{T \wedge n}^3\right] \rightarrow \mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^T S_i\right] - \frac{1}{3}\mathbb{E}[S_{T \wedge n}^3]$$

Da questo si ricava che $a - \frac{1}{3}a^3 = \mathbb{E}[\sum_{i=0}^T S_i] - \frac{1}{3}\mathbb{E}[S_{T \wedge n}^3]$, e quindi, poichè q.c. $S_T = 0$ oppure K , si ha

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^T S_i\right] = a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}\mathbb{E}[S_T^3] \leq a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}K^3$$

**Esame di Probabilità mod. B del 15 dicembre 2003 (Corso di Laurea in
Matematica, Università degli Studi di Padova) (docente: Tiziano Vargiolu)**

Sono ammessi all'orale:

Midolo Luca Francesco 25,5

Visione compiti e orali: mercoledì 17 dicembre ore 11 nel mio studio.